INTRODUCTION AUX ∞-CATÉGORIES

Davit

Résumé

Table des matières

Notations

— On notera quasi systématiquement $*$ pour Δ^0.

1 L'∞-catégorie des ∞-catégories

Dans cette section, l'objectif sera de construire l'∞-catégorie des ∞-catégories . On ne rappellera pas toute la théorie des ensembles simpliciaux qui a été présentée par Alexis à l'exposé précédent.

1.1 ∞-catégories

1.1.1 Définition des ∞-catégories

Aux ensembles simpliciaux présentés au dernier exposé, on peut ajouter ceux de la forme suivante.

Définition 1.1. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $0 \leqslant i \leqslant n$. Le **cornet** Λ_i^n a pour k-simplexes les morphismes $\sigma : [k] \to [n]$ tels qu'il existe $j \in [n] \smallsetminus \{i\}$ qui n'est pas dans l'image de σ.

Exemple 1.1. — $\Lambda_0^0 = \varnothing$.
— $\Lambda_0^1 = * = \Lambda_1^1$

L'exercice suivant permet de comprendre comment définir des morphismes entre ensembles simpliciaux "petits".

Exercice 1.2. Disons qu'un ensemble simplicial X est de dimension[1] d si tous les n-simplexes pour $n > d$ sont dégénérés.

1. Montrer qu'un morphisme d'ensembles simpliciaux $X \to Y$ où X est de dimension d est entièrement déterminé par les $X_0 \to Y_0, ..., X_d \to Y_d$.
2. Calculer la dimension des ensembles simpliciaux standards, cornets, et bords.

A la lumière de l'exercice précédent, on a les images suivantes :
• Un morphisme $\Lambda_1^2 \to X$ est la donnée d'une paire de 1-simplexes (f, g) tels que $d^0 f = d^1 g$. On appellera une telle paire **composable.**
• Un morphisme $\Delta^0 \to X$ est la donnée d'un 0-simplex de X.
• Un morphisme $\Delta^1 \to X$ est la donnée d'un morphisme de X (*i.e.* un 1-simplex).
En fait c'est un fait général que pour un ensemble simplicial égal à son n-squelette, les morphismes partant de lui sont définis par les n-premiers termes.
On voit qu'on peut presque définir une catégorie à partir d'un ensemble simplicial. En fait on peut effectivement le faire, mais la construction est plus intuitive pour les ∞-catégorie .

Définition 1.2. Soit $\mathscr{C}$ un ensemble simplicial. On dit que $\mathscr{C}$ est une ∞-**catégorie** si pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $0 < i < n$, un morphisme $\Lambda_i^n \to \mathscr{C}$ se relève à Δ^n :

$$\begin{tikzcd} \Lambda_i^n \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{C} \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

On appelle les 0-simplexes de $\mathscr{C}$ les objets de $\mathscr{C}$, et si $f \in \mathscr{C}_1$, on dit que f est un morphisme de $d^1 f$ vers $d^0 f$.

Définition 1.3. Un ensemble simplicial X est un **complexe de Kan** si les mêmes problèmes de relèvement ont une solution pour $0 \leqslant i \leqslant n$.

1.1.2 Constructions classiques

Catégorie d'homotopie Soit $\mathscr{C}$ une ∞-catégorie . Alors on peut définir sa **catégorie d'homotopie** ainsi : Les objets sont donnés par $\mathscr{C}_0$, et les morphismes de x vers y sont les 1-simplexes $f \in \mathscr{C}_1$ tels que $d^1 f = x, d^0 f = y$, soumis à la relation suivante : $f, g : x \to y$ sont équivalents si on a un 2-simplexe de $\mathscr{C}$ de la forme

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[u, "\mathrm{id}_x"] \arrow[r, "f"'] & y \end{tikzcd}$$

1. Terminologie non standard.

On note cette catégorie $h\mathscr{C}$. La construction est fonctorielle en $\mathscr{C}$, et comme dit plus haut, s'étend à tous les ensembles simpliciaux, avec une définition plus abstraite. (pas le temps d'en parler). Une fois étendu, on obtient même un adjoint à gauche au foncteur nerf.

Proposition 1.1. *On a une adjonction*

$$h : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{Cat} : N.$$

En particulier on a des foncteurs $\mathrm{id}_{\mathbf{sSet}} \to Nh$ et $hN \to \mathrm{id}_{\mathbf{Cat}}$, et ce dernier est même un isomorphisme (dans le nerf d'une catégorie, la relation d'homotopie est en fait la relation d'égalité, donc la catégorie d'homotopie du nerf d'une catégorie est précisément cette même catégorie).

∞-catégorie des foncteurs. On peut définir très simplement ce qu'est un foncteur entre ∞-catégories . Il s'agit seulement d'un morphisme entre les ensembles simpliciaux sous-jacents, donc d'une transformation naturelle entre préfaisceaux. Cependant, on pourrait vouloir organiser ces données de sorte à définir l' ∞-catégorie des foncteurs entre deux ∞-catégories .

Définition 1.4. Soit X, Y deux ensembles simpliciaux. L'ensemble simplicial **produit** $X \times Y$ est l'ensemble simplicial $[n] \mapsto X_n \times Y_n$.

Définition 1.5. Soit $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ deux ∞-catégories . L'∞-catégorie des **foncteurs** entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ est l'ensemble simplicial $\mathrm{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathscr{C} \times \Delta^n, \mathscr{D})$.

Remarque 1.3. Cette définition s'étend à tous les ensembles simpliciaux avec la même formule. Dans ce cas, on note le plus souvent $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$. Le résultat n'est cependant une ∞-catégorie que si Y est une ∞-catégorie .

Remarque 1.4. Les 0-simplexes de $\mathrm{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ sont exactement les foncteurs entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

Ces deux constructions sont adjointes l'une de l'autre.

Proposition 1.2. *Soit X, Y des ensembles simpliciaux. On a une adjonction*

$$- \times X : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{sSet} : \underline{\mathrm{Hom}}(X, -).$$

Démonstration. L'adjonction tient sur les représentables par définition. On l'étend à tous les ensembles simpliciaux par densité et en utilisant la commutation "$\mathrm{Hom}(\mathrm{colim}\, F, -) = \lim \mathrm{Hom}(F, -)$". □

On finit ce paragraphe avec deux calculs utils.

Exemple 1.5.
- On a que $\underline{\mathrm{Hom}}(*, X) \cong X$ pour tout ensemble simplicial X. En effet, cela vient du fait que $*$ est le préfaisceau constant égal au singleton.
- On a $\underline{\mathrm{Hom}}(\partial\Delta^1, X) \cong X \times X$. Cette fois-ci, on peut calculer $(\partial\Delta^1)_n = \{[n] \to [1] | \text{non surjectif}\} = \{[n] \to \{0\}\} \coprod \{[n] \to \{1\}\} = * \coprod *$.

Equivalence d'homotopie Après avoir défini les foncteurs, on va vouloir les comparer et leur donner des qualités. La première des qualités qu'on peut définir est l'équivalence d'homotopie.

Définition 1.6. On dit que deux foncteurs $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ sont **homotopes**, ce qu'on écrit $F \cong G$, s'il existe un foncteur $H : \mathscr{C} \times \Delta^1 \to \mathscr{D}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, "1"] \arrow[dr, "F"'] & \mathscr{C} \times \Delta^1 \arrow[d, dashed, "H"] & \mathscr{C} \arrow[l, "0"'] \arrow[dl, "G"] \\
& \mathscr{D} &
\end{tikzcd}$$

On dit aussi que H est une **transformation naturelle** de F vers G.

On voit facilement que c'est exactement la même chose qu'un 1-simplexe de $\mathrm{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ de source F et de but G.

Exemple 1.6. Pour un foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, on peut définir la transformation naturelle identité par $\mathscr{C} \times \Delta^1 \xrightarrow{\text{proj.}} \mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D}$.

Remarquez que, par adjonction, une transformation naturelle peut aussi être vue comme un foncteur $\Delta^1 \to \mathrm{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$, tel que $1 \mapsto F$ et $0 \mapsto G$.

On peut ainsi noter que, comme pour le cas de 1-catégories, on a pour tout objet $x \in \mathscr{C}$, des morphismes $Fx \to Gx$, soumis à des cohérences plus grandes qu'un simple carré commutatif. En effet, cette fois, on utilise l'adjonction dans l'autre sens, et on dit qu'une transformation naturelle c'est aussi un foncteur $\mathscr{C} \to \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathscr{D})$, et on regarde ce foncteur sur les 0-simplexes. On peut alors décrire un critère pour qu'une transformation naturelle soit une équivalence [2]

Théorème 1.3 (Pointwise criterion). *Soit $f : \Delta^1 \to \mathrm{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ une transformation naturelle entre deux foncteurs F et G. Si pour tout $x \in \mathscr{C}$, le morphisme induit $Fx \to Gx$ est une équivalence dans $\mathscr{D}$, alors f est une équivalence.*

Définition 1.7. Un foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est une **équivalence d'homotopie** s'il existe un foncteur $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tel que $FG \cong \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$ et $GF \cong \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$.

Espace des morphismes Soit $\mathscr{C}$ une ∞-catégorie , et soit x, y deux objets de $\mathscr{C}$. Comment définir l' "espace" des morphismes entre x et y ?

Définition 1.8. Soit $\mathscr{C}$ une ∞-catégorie , et $x, y \in \mathscr{C}$ deux objets. L'**espace des applications** de x vers y, noté $\mathrm{map}_{\mathscr{C}}(x, y)$ est défini par le tiré en arrière suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{map}_{\mathscr{C}}(x,y) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathscr{C}) \arrow[d] \\
* \arrow[r, "{(x,y)}"'] & \mathscr{C} \times \mathscr{C}
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, la flèche verticale à droite est induite par l'inclusion $\partial\Delta^1 \to \Delta^1 : \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathscr{C}) \to \mathrm{Fun}(\partial\Delta^1, \mathscr{C}) \cong \mathscr{C} \times \mathscr{C}$.

Remarque 1.7. On peut calculer très simplement les 0-simplexes de $\mathrm{map}_{\mathscr{C}}(x, y)$. En effet, le tiré en arrière se calcule terme à terme, et pour $n = 0$, on doit calculer

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{map}_{\mathscr{C}}(x,y)_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{Hom}(\Delta^1, \mathscr{C}) = \mathscr{C}_1 \arrow[d, "{(d^1,d^0)}"] \\
* \arrow[r, "{(x,y)}"'] & \mathscr{C}_0 \times \mathscr{C}_0
\end{tikzcd}$$

Il s'agit alors des 1-simplexes $f \in \mathscr{C}_1$ tels que $d^1 f = x$ et $d^0 f = y$, donc c'est exactement l'ensemble des morphismes de x vers y au sens de cette définition.

On peut montrer que les ensembles simpliciaux $\mathrm{map}_{\mathscr{C}}(x, y)$ sont en fait des complexes de Kan [3].

Foncteurs pleinement fidèles et essentiellement surjectifs Grâce à la construction précédente, on peut définir la notion de pleine fidélité.

Pour commencer, si x, y sont des objets d'une ∞-catégorie $\mathscr{C}$ et $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est un foncteur, alors on a un morphisme $\mathrm{map}_{\mathscr{C}}(x, y) \to \mathrm{map}_{\mathscr{D}}(Fx, Fy)$ induit par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{map}_{\mathscr{C}}(x,y) \arrow[r] \arrow[dr, dashed] \arrow[ddr, bend right] & \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathscr{C}) \arrow[dr, bend left, "F_*"] & \\
& \mathrm{map}_{\mathscr{D}}(Fx,Fy) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathscr{D}) \arrow[d] \\
& * \arrow[r, "{(Fx,Fy)}"'] & \mathscr{D} \times \mathscr{D}
\end{tikzcd}$$

2. Etant un foncteur entre ∞-catégories , cela signifie que c'est une équivalence dans Cat_∞ qu'on définit plus tard (Définition 1.17).

3. Plus généralement, la fibre au dessus d'un objet d'un morphisme $\mathrm{Fun}(K, \mathscr{C}) \to \mathrm{Fun}(L, \mathscr{C})$ induit par un monomorphisme $L \to K$ est un complexe de Kan.

Définition 1.9. Un foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ entre ∞-catégories est **pleinement fidèle** si pour tous objets x, y de $\mathscr{C}$, le morphisme

$$\mathrm{map}_{\mathscr{C}}(x,y) \to \mathrm{map}_{\mathscr{D}}(Fx, Fy)$$

est une équivalence d'homotopie.

Définition 1.10. Un foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ entre ∞-catégories est **essentiellement surjectif** si pour tout objet $y \in \mathscr{D}$, il existe un objet $x \in \mathscr{C}$ et une équivalence $Fx \cong y$.

Cela revient à dire que F est essentiellement surjectif si le foncteur induit sur les catégories d'homotopie est essentiellement surjectif.

1.2 ∞-groupoïdes

Dans les 1-catégories, les groupoïdes sont faciles à définir, et les sous-groupoïdes faciles à construire. Il s'agit de catégorie dont tous les morphismes sont des isomorphismes, et si $\mathscr{C}$ est une catégorie, son sous-groupoïde maximal $\mathscr{C}^{\cong}$ est la catégorie dont les objets sont les mêmes, et les morphismes retenus ne sont plus que les isomorphismes. Les idées restent les mêmes pour les ∞-catégories , mais la réalisation est plus technique.

Définition 1.11. Soit $\mathscr{C}$ une ∞-catégorie . Un morphisme $f \in \mathscr{C}$ est une **équivalence** si le morphisme induit par f dans $h\mathscr{C}$ est un isomorphisme.

En déroulant la définition de la catégorie d'homotopie, on voit qu'un morphisme $f : X \to Y$ est une équivalence s'il existe $g : Y \to X$ et les deux 2-simplexes suivants

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[rr, "\mathrm{id}_Y"] \arrow[dr, "g"] & & Y \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_X"'] & & X \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Définition 1.12. On dit qu'une ∞-catégorie $\mathscr{C}$ est un **∞-groupoïde** si tous ses 1-simplexes sont des équivalences.

En réalité, les ∞-groupoïdes sont exactement les complexes de Kan, mais c'est un résultat plutôt dur à démontrer.

On peut donner une "caractérisation" des ∞-groupoïdes grâce à la définition suivante qui mime la définition sur les 1-catégories, en voyant les équivalences comme le pendant ∞-catégorique des isomorphismes.

Définition 1.13. Un fonteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est **conservatif** si, pour tout $f \in \mathscr{C}_1$, si Ff est une équivalence dans $\mathscr{D}$, alors f est une équivalence dans $\mathscr{C}$.

Proposition 1.4. *Une ∞-catégorie $\mathscr{C}$ est un ∞-groupoïde si, et seulement si, le morphisme canonique $\mathscr{C} \to *$ est conservatif.*

Maintenant, en partant d'une ∞-catégorie quelconque, on voudrait arriver à son sous-groupoïde maximal. Pour cela, on va utiliser la construction connue dans les 1-catégories grâce à la catégorie d'homotopie, et repasser dans les ∞-catégories grâce au nerf. Mais la construction n'est pas aussi simple que $N((h\mathscr{C})^{\cong})$.

Définition 1.14. Soit $\mathscr{C}$ une ∞-catégorie . Sont **sous-groupoïde maximal**, ou **groupoid core** est défini par le tiré en arrière suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}^{\cong} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathscr{C} \arrow[d] \\ N((h\mathscr{C})^{\cong}) \arrow[r] & Nh\mathscr{C} \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, le morphisme vertical à droite vient de l'adjonction $h \dashv N$, et le morphisme horizontal du bas vient de l'inclusion $(h\mathscr{C})^{\cong} \to h\mathscr{C}$.

Proposition 1.5. *Le groupoid core d'une ∞-catégorie est un ∞-groupoïde.*

1.3 Construction de Cat_∞

1.3.1 Catégories simpliciales

On rappelle (on l'a vu au premier exposé) qu'une catégorie simpliciale est une catégorie enrichie sur les ensembles simpliciaux, c'est-à-dire que les objets "Hom" sont des ensembles simpliciaux (entre autres). On va définir un jumeau à Δ^n dans $\mathbf{Cat}_\Delta$, la catégorie des catégories simpliciales, et s'en servir pour définir une notion de nerf pour ces catégories.

Pour $i, j \in I$, avec I un ensemble fini totalement ordonné (le plus souvent $[n]$), on définit

$$P_{i,j}^I = \{J \subseteq I | i, j \in J, k \in J \Rightarrow i \leqslant k \leqslant j\}.$$

Alors $P_{i,j}$ est un ensemble partiellement ordonné par l'inclusion, et on peut donc le voir comme une catégorie. On définit alors les catégories simpliciales suivantes.

Définition 1.15. Soit $n \in \mathbf{N}$. La catégorie simpliciale $\mathfrak{C}[\Delta^n]$ a pour objets $0, ..., n$, et pour morphismes

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(i,j) = \begin{cases} \varnothing \text{ si } j < i, \\ N(P_{i,j}^{[n]}) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Exemple 1.8. On peut facilement calculer ces objets pour $n = 0, 1, 2$:
- — L'unique objet de $\mathfrak{C}[\Delta^0]$ est 0, et $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[\Delta^0]}(0,0) = N(*) = *$.
- — Les objets de $\mathfrak{C}[\Delta^1]$ sont 0 et 1 et tous les Hom à part $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[\Delta^1]}(1,0) = \varnothing$ sont donnés par $*$.
- — Les objets de $\mathfrak{C}[\Delta^2]$ sont $0, 1$ et 2, et tous les espaces d'endomorphismes sont $*$, ainsi que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[\Delta^2]}(0,1)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[\Delta^2]}(1,2)$. On a de plus $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[\Delta^2]}(0,2) = N(P_{0,2}) = \Delta^1$.

On est alors armé pour définir le nerf cohérent d'une catégorie simpliciale.

Définition 1.16. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie simpliciale. Le **nerf cohérent** de $\mathscr{C}$ est l'ensemble simplicial $[n] \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}_\Delta}(\mathfrak{C}[\Delta^n], \mathscr{C})$

Pour faire le calcul suivant, on va devoir rappeler la notion de foncteur entre catégories enrichies. Soit X, Y des catégories V-enrichies. Un foncteur de X vers Y est la donnée d'applications $F : \mathrm{Ob}X \to \mathrm{Ob}Y$ et, pour tout $x, y \in \mathrm{Ob}X$, de morphismes $F_{xy} : \mathrm{Hom}_X(x,y) \to \mathrm{Hom}_Y(Fx, Fy)$, tels que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_X(x,y) \otimes \mathrm{Hom}_X(y,z) \arrow[r] \arrow[d, "F_{xy}\otimes F_{yz}"'] & \mathrm{Hom}_X(x,z) \arrow[d, "F_{xz}"] \\ \mathrm{Hom}_Y(Fx,Fy) \otimes \mathrm{Hom}_Y(Fy,Fz) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_Y(Fx,Fz) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "\mathrm{id}_x"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{Fx}"'] & \mathrm{Hom}_X(x,x) \arrow[d, "F_{xx}"] \\ & \mathrm{Hom}_Y(Fx,Fx) \end{tikzcd}$$

Analysons alors les premiers simplexes du nerf cohérent d'une catégorie simpliciale $\mathscr{C}$.
- — Les 0-simplexes sont les objets de $\mathscr{C}$.
- — Les 1-simplexes sont les 0-simplexes des espaces de morphismes.
- — Les 2-simplexes sont la données de 3 objets x, y, z, de deux morphismes $f : x \to y$ et $g : y \to z$, ainsi que d'une homotopie entre la composée gf et un autre morphisme $x \to z$.

Grâce au théorème de densité, et en démontrant que $\mathbf{Cat}_\Delta$ est cocomplète, on voit qu'on peut étendre $\mathfrak{C}[-]$ en un foncteur $\mathbf{sSet} \to \mathbf{Cat}_\Delta$.

Proposition 1.6. *On a une adjonction*

$$\mathfrak{C}[-] : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{Cat}_\Delta : N.$$

Démonstration. C'est la même idée qu' ici. □

Définissons enfin l'∞-catégorie des ∞-catégories .

Définition 1.17. L'∞**-catégorie des** ∞**-catégories** est le nerf cohérent de la catégorie simpliciale qui a pour objets les ∞-catégories , et pour $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ deux ∞-catégories , l'espace des morphismes entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ est $\mathrm{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})^{\cong}$.

Grace au calcul après la définition 1.16, on peut calculer les petits simplexes de cette ∞-catégorie .

Exemple 1.9.
— Les 0-simplexes sont les ∞-catégories .
— Les 1-simplexes sont les foncteurs.
— Les 2-simplexes sont la donnée de trois foncteurs $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}, G : \mathscr{D} \to \mathscr{E}, H : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ et d'une équivalence $GF \cong H$.

Profitons d'avoir la notion de nerf cohérent pour aussi donner une autre définition similaire.

Définition 1.18. L'∞**-catégorie des espaces**, noté **Spc** est le nerf cohérent de la catégorie simpliciale dont les objets sont les complexes de Kan, est dont l'ensemble simplicial des morphismes est donné par $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$.

On voit encore que les 0-simplexes de cette ∞-catégorie sont les complexes de Kan, que les 1-simplexes sont les foncteurs entre complexes de Kan, ...

2 Classes remarquables de morphismes

2.1 Equivalences de Joyal

Les équivalences de Joyal sont l'analogue ∞-catégorique des équivalences de catégories entre 1-catégories [4].

Définition 2.1. Un foncteur $f : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est une **équivalence de Joyal** si le 1-simplex induit dans Cat_∞ est une équivalence.

Une petite explication s'impose. On a déjà calculé que les 1-simplexes de Cat_∞ sont exactement les foncteurs entre ∞-catégories . Ainsi, un foncteur $f : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ définit un 1-simplexe de Cat_∞, qui peut alors être une équivalence au sens de Définition 1.11. Cela signifie qu'il existe un foncteur $g : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ et des équivalences $fg \cong \mathrm{id}_{\mathscr{D}}, gf \cong \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$.

2.2 Fibrations

2.2.1 Internes, gauches, droites, de Kan

Définition 2.2. Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'ensembles simpliciaux. On dit que f est une **fibration** (gauche, droite, interne, de Kan), si pour tout $n \in \mathbf{N}$, les problèmes de relèvement suivants admettent une solution :

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

pour $0 \leqslant i < n$, $0 < i \leqslant n$, $0 < i < n$ ou $0 \leqslant i \leqslant n$ respectivement.

Remarque 2.1. Une fibration interne $X \to *$ est une ∞-catégorie . Une fibration de Kan $X \to *$ est un complexe de Kan.

On a d'ailleurs le théorème suivant qui montre qu'une fibration interne conservative est presque une fibration de Kan.

4. On n'aura pas le temps d'en parler durant la présentation, mais on peut prouver que les équivalences de Joyal sont exactement les foncteurs pleinement fidèles essentiellement surjectifs, exactement comme les équivalences de catégories.

Théorème 2.1 (Joyal's special horn lifting)**.** *Une fibration interne entre ∞-catégories $p : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est conservative si, et seulement si, le problème de relèvement suivant admet une solution pour $n \geqslant 2$ dès que $p(\varphi)$ est une équivalence*

$$\begin{tikzcd} \Delta^{\{0,1\}} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & \Lambda_0^n \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{C} \arrow[d, "p"] \\ & \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

C'est ce théorème qu'on utilise pour prouver que les ∞-groupoïdes sont des complexes de Kan. En effet, si X est un ∞-groupoïde, alors $X \to *$ est conservatif. Considérons alors un problème de relèvement

$$\begin{tikzcd} \Lambda_0^n \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & * \end{tikzcd}$$

Le morphisme de X associé à l'arête $\{0,1\}$ de Λ_0^n est une équivalence par définition d'un ∞-groupoïde, et est donc envoyé sur une équivalence de $*$ par p. Ainsi, par le théorème de Joyal Théorème 2.1, le relèvement existe. Par passage au dual, le relèvement pour les Λ_n^n existe aussi.

Dans un vocabulaire plus général, on dit qu'une fibration (truc) est un morphisme ayant le RLP (right lifting property) pour les inclusions de cornets (trucs). On peut alors en donner la notion duale, celle de LLP (left lifting property) :

Définition 2.3. Un morphisme $f : X \to Y$ est **anodin** (gauche, droite, interne) si pour toute fibration $S \to T$ (gauche, droite, interne), le problème de relèvement suivant a une solution :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & S \arrow[d] \\ Y \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & T \end{tikzcd}$$

Ces classes de morphismes sont sujets à beaucoup de propriétés de stabilité (par tiré en arrière, Hom, produit, etc), et on va en citer quelques unes ici. La plupart des preuves sont infectes et très combinatoires et longues. L'intérêt de les démontrer à ce stade est moindre, et on pense qu'il est plus judicieux d'utiliser ces propriétés comme "axiomes".

Notons pour X, A des ensembles simpliciaux, $X^A := \underline{\mathrm{Hom}}(A, X)$. On a alors pour A, B, S, T, X, Y des ensembles simpliciaux et des morphismes $A \to B, X \to Y, S \to T$, des carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} A \times S \arrow[r] \arrow[d] & A \times T \arrow[d] \\ B \times S \arrow[r] & B \times T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X^B \arrow[r] \arrow[d] & X^A \arrow[d] \\ Y^B \arrow[r] & Y^A \end{tikzcd}$$

qui induisent des morphismes

$$A \times T \coprod_{A \times S} B \times S \to B \times T,$$

$$X^B \to X^A \times_{Y^A} Y^B.$$

Théorème 2.2.
1. *Soit $i : A \to B$ et $g : S \to B$ des morphismes d'ensembles simpliciaux. Si i ou g est anodyne (gauche, droite, interne), alors $A \times T \coprod_{A \times S} B \times S \to B \times T$ est anodyne (gauche, droite, interne).*
2. *Soit $f : X \to Y$ une fibration (gauche, droite, interne), et $i : A \to B$ un ensemble simplicial. Alors $X^B \to X^A \times_{Y^A} Y^B$ est une fibration (gauche, droite, interne).*
3. *En particulier ($Y = *$), si X est une ∞-catégorie et $A \to B$ est un monomorphisme, alors $\mathrm{Fun}(B, X) \to \mathrm{Fun}(A, X)$ est une fibration interne.*
4. *Si de plus i est anodyne (gauche, droite, interne), alors $< f, i >$ est une fibration triviale.*

2.2.2 Triviales

Définition 2.4. On dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ est une **fibration triviale** s'il vérifie le RLP pour les inclusions de bords des simplexes standards :

$$\begin{tikzcd} \partial\Delta^n \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

Théorème 2.3. *Soit X un complexe de Kan. Alors X est contractile si, et seulement, $X \to *$ est une fibration de Kan triviale.*

2.2.3 (co)cartésiennes

Les fibrations (co)cartésiennes sont cruciales dans la théorie des ∞-catégories . Leur application la plus importante peut-être est leur apparition dans le théorème Straightening-Unstraightening de Lurie, qui permet de construire par exemple des morphismes dans Cat_∞, et en particulier de définir les notions de ∞-catégorie -monoïdale et autres définitions de bases de l'algèbre supérieure.

Définition 2.5. Soit $p : X \to Y$ une fibration interne. Un morphisme $f : \Delta^1 \to X$ est **p-cartésien** si les problèmes de relèvement suivant ont une solution pour $n \geqslant 2$

$$\begin{tikzcd} \Delta^{\{n-1,n\}} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "f"] & \Lambda^n_n \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ & \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

De façon duale, c'est un morphisme **p-cocartésien** si les problèmes de relèvement suivant ont une solution pour $n \geqslant 2$

$$\begin{tikzcd} \Delta^{\{0,1\}} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "f"] & \Lambda^n_0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ & \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

Définition 2.6. Une fibration interne $p : X \to Y$ est une **fibration cartésienne** si tous les problèmes de relèvement

$$\begin{tikzcd} \{1\} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ \Delta^1 \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

ont une solution qui est un morphisme p-cartésien.

De façon duale, p est une **fibration cocartésienne** si les problèmes de relèvement

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ \Delta^1 \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

ont une solution qui est un morphisme p-cocartésien.

De façon informelle, une fibration interne est (co)cartésienne si tout morphisme de Y admet un relèvement p-(co)cartésien dans X une fois fixé un but (ou source).

Comme on l'a déjà dit, une apparition majeure des fibrations (co)cartésiennes est dans le théorème de Lurie suivant.

Théorème 2.4 (Straightening-Unstraightening)**.** *Pour toute ∞-catégorie $\mathscr{C}$, il y a une équivalence de Joyal*

$$\mathrm{CoCart}(\mathscr{C}) \cong \mathrm{Fun}(\mathscr{C}, \mathrm{Cat}_\infty).$$

Prenons par exemple une fibration cocartésienne $p : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$. Alors pour tout objet $x \in \mathscr{C}$, on a le tiré en arrière $\mathscr{D}_x = * \times_{\mathscr{C}} \mathscr{D}$ qui est une ∞-catégorie . Ceci définit l'action sur les 0-simplexes de l'équivalence précédente.

3 Rapide retour par les ensembles simpliciaux

3.1 Topologie des ensembles simpliciaux

Groupes d'homotopie Comme en topologie, on peut définir les groupes d'homotopies des ensembles simpliciaux.

Définition 3.1. Soit $(X, x : * \to X)$ un ensemble simplicial pointé, et $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 1}$. Le n-ème **groupe d'homotopie** de X est

$$\pi_n(X,x) = [(\Delta^n, \partial\Delta^n), (X,x)],$$

où la relation est celle d'homotopie.

On définit aussi $\pi_0(X) = X_0/\sim$ où $x \sim y$ s'il existe $f \in X_1$, $f : x \to y$.

Un résultat notable est le suivant.

Théorème 3.1. *Soit $f : X \to Y$ un foncteurs entre complexes de Kan induisant une bijection sur les π_0. Alors f est une équivalence d'homotopie, si, et seulement si, f induit des bijections pour tout n et $x \in X$*

$$f_* : \pi_n(X,x) \to \pi_n(Y, fx).$$

Contractibilité En s'inspirant de la terminologie topologique, on peut définir la notion de contractibilité.

Définition 3.2. Un ensemble simpliciale X est **contractile** si le morphisme canonique $X \to *$ est une équivalence d'homotopie.

Connexité

Définition 3.3. Un ensemble simplicial X est **connexe** si dès qu'on a une décomposition $X = Y \coprod Y'$, alors $Y = \varnothing$ ou $Y' = \varnothing$.

3.2 (co)Squelettes

Définition 3.4. Soit X un ensemble simplicial, et $n \in \mathbf{N}$. Le **n-squelette** de X est le plus petit sous-ensemble simplicial de X contenant tous les simplexes de X de dimension $\leqslant n$.

Un ensemble simplicial isomorphe à son n-squelette pour un certain n vérifie qu'un morphisme $X \to Y$ est déterminé par les n premiers termes.

Dualement, on peut définir les ensembles simpliciaux **n-cosquelettaux**. Ce sont ceux pour lesquels les restrictions $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^m, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\partial\Delta^m, X)$ sont des bijections pour $m > n$. Ainsi, pour tout ensemble simplicial S, la restriction $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(S, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathrm{sk}_n S, X)$ est une bijection.

3.3 Joins, slices

Rappelons les définitions dans le cas des 1-catégories. Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux catégories. Alors leur jointure est la catégorie $\mathscr{C} \star \mathscr{D}$ dont les objets sont $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \coprod \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, et les morphismes sont donnés par

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}\star\mathscr{D}}(X,Y) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \text{ si } X, Y \in \mathscr{C} \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X,Y) \text{ si } X, Y \in \mathscr{D} \\ * \text{ si } X \in \mathscr{C}, Y \in \mathscr{D} \\ \varnothing \text{ si } X \in \mathscr{D}, Y \in \mathscr{C}. \end{cases}$$

De l'autre côté, pour un objet X dans une catégorie $\mathscr{C}$, on peut définir la catégorie au-dessus de X, noté $\mathscr{C}_{/X}$ comme étant celle dont les objets sont les paires $(Y, f : Y \to X)$, et les morphismes sont les triangles commutatifs évidents. On définit la catégorie en-dessous de X comme $(\mathscr{C}^{op}_{/X})^{op}$.

Ces constructions ne sont peut-être pas hyper fréquentes dans la théorie des 1-catégories, mais beaucoup de concepts peuvent être formulés avec elles (notamment celle de (co)limites). On va donner ces constructions dans le cadre ∞-catégorique et on verra comment les utiliser plus tard au cas par cas.

Joint On par de deux ensembles simpliciaux X et Y. On définit alors l'ensemble simplicial

$$(X \star Y)_n = \coprod_{(I,J)\in \mathrm{Cut}([n])} X(I) \times Y(J),$$

avec $X(\varnothing) = Y(\varnothing) = *$, et $\mathrm{Cut}([n])$ est l'ensemble des décompositions $[n] = I \coprod J$ avec $i < j$ pour tout $i \in I$ et $j \in J$.

Proposition 3.2. *Pour tout ensemble simplicial X, on a des foncteurs*

$$X \star - : \mathbf{sSet} \to \mathbf{sSet}_{X/},$$

$$- \star X : \mathbf{sSet} \to \mathbf{sSet}_{X/}.$$

Démonstration. Il suffit de voir que le résultat est un un élément de $\mathbf{sSet}_{X/}$. Pour ça, il suffit de remarquer qu'en prenant la coupure $[n] = [n] \coprod \varnothing$, on retrouve X_n dans le coproduit dans la définition, ce qui permet de définir $X \to X \star Y$, et si on a $Y \to Y'$, on voit que ce morphisme construit fait commuter

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & X \star Y \arrow[d] \\ & X \star Y' \end{tikzcd}$$

ce qui montre la fonctorialité. □

Lemme 3.3. *Les foncteurs $X \star -, - \star X : \mathbf{sSet} \to \mathbf{sSet}_{X/}$ préservent les colimites.*

Démonstration. On calcule. □

Exemple 3.1. Pour un ensemble simplicial I, on peut définir $I^{\triangleleft} = * \star I$, et $I^{\triangleright} = I \star *$, qu'on appelle respectivement **cône** et **cocône** sur I. Dans la théorie des catégories classique, cela revient exactement à ajouter un nouvel objet initial ou final à la catégorie I.

Exemple 3.2. On calcule facilement que $\Delta^n \star \Delta^m = \Delta^{n+m+1}$.

Slice On va définir les slices de sorte à vérifier automatiquement une relation d'adjonction avec le joint. Soit $p : S \to X$ morphisme d'ensembles simpliciaux. On définit $X_{p/}$ par $[n] \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{S/}}(S \star \Delta^n, X)$. De manière duale, on définit $X_{/p}$ par $[n] \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}_{S/}}(S \star \Delta^n, X)$

Proposition 3.4. *On a des adjonctions*

$$\begin{aligned} \mathbf{sSet}_{S/} &\rightleftarrows \mathbf{sSet} \\ (p : S \to X) &\mapsto X_{p/} \\ (S \to S \star X) &\leftarrow\!\shortmid X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{sSet}_{S/} &\rightleftarrows \mathbf{sSet} \\ (p : S \to X) &\mapsto X_{/p} \\ (S \to X \star S) &\leftarrow\!\shortmid X \end{aligned}$$

Démonstration. Découle de la définition, du théorème de densité, et du lemme 3.3. □

On peut aussi définir les slices d'une ∞-catégorie au-dessus ou en dessous d'un objet cette fois, avec les formules suivantes

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}_{/x} \arrow[r] \arrow[dd] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathscr{C}) \arrow[d] \\ & \mathscr{C} \times \mathscr{C} \arrow[d, "pr_2"] \\ * \arrow[r, "x"'] & \mathscr{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{C}_{x/} \arrow[r] \arrow[dd] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathscr{C}) \arrow[d] \\ & \mathscr{C} \times \mathscr{C} \arrow[d, "pr_1"] \\ * \arrow[r, "x"'] & \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

De manière informelle, ces définitions disent exactement qu'on prend les morphismes de $\mathscr{C}$ de source ou de but fixé.

Index