LIMITES ET ADJONCTOIN

November 6, 2025

La référence principale est : J. Lurie, Higher Topos Theory, chapitres 4 et 5.

1 Limites, colimites

Au niveau 1-catégorique, on définit les limites ou les colimites comme étant des cônes ou cocônes universel.

Pour les définitions et certaines propriétés des constructions joint et tranches, on pourra se référer à l'exposé précédent.

Proposition 1. *Si $\mathscr{C}$ est une ∞-catégorie , et $p : K \to \mathscr{C}$ est un morphisme, alors $\mathscr{C}_{/p}, \mathscr{C}_{p/}$ sont des ∞-catégories .*

Proof. cf [HTT, 1.2.9.3]. □

Definition 2. Soit $\mathscr{C}$ une ∞-catégorie , et $c \in \mathscr{C}$. On dit que c est **final** si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

1. Pour tout $c' \in \mathscr{C}, \operatorname{map}(c', c)$ est contractile.
2. Le morphisme $\mathscr{C}_{/c} \to \mathscr{C}$ est une fibration triviale.

On dira dualement que c est **initial** si

1. Pour tout $c' \in \mathscr{C}, \operatorname{map}(c, c')$ est contractile.
2. Le morphisme $\mathscr{C}_{c/} \to \mathscr{C}$ est une fibration triviale.

Definition 3. Soit $\mathscr{C}$ une ∞-catégorie , et $p : K \to \mathscr{C}$. Une **colimite** (resp. **limite**) de p est un objet initial de $\mathscr{C}_{p/}$ (resp. final de $\mathscr{C}_{/p}$).

Example 4. 1) Dans **Spc**, le pullback $p : X \to Y$, $q : Z \to Y$ est donné par $X \times_Y Z$.

2) $* \times_(Y, y_0) * = \Omega(Y, y_0)$.

3) $* \coprod_(Y, y_0) * = \Sigma(Y, y_0)$.

4) $\mathscr{C} \times^h_E \mathscr{S}$.

5) Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne avec assez d'injectifs et de projectifs. Un carré est un pullback si, et seulement sic'est un pushout.

7) $\mathscr{C}$ une ∞-catégorie , τ une topologique sur $ho(\mathscr{C})$. Alors $F \in PSh(\mathscr{C}) = \operatorname{Fun}(\mathscr{C}^{op}, \mathbf{Spc})$ est un faisceau si pour tout recouvrement $\{U_i \to c\}$, on a $F(c) = \lim_\Delta$(nerf de cech du recouvrement)$=$ $\lim[\prod_i F(U_i) \to \prod_{i,j} F(U_i \times_c U_j) \to ...]$.

Proposition 5. *Soit $\mathscr{C}$ une ∞-catégorie et $\overline{p} : K^\triangleright \to \mathscr{C}$ un cocône sur p. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1) $\overline{p}$ est une colimite.

2) Soit $X = \overline{p}(\infty)$ le sommet du cocône et $\alpha : p \to \delta X$ $(\delta : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^K)$. Pour tout $Y \in \mathscr{C}$, α induit une équivalence d'homotopie

$$\operatorname{map}(X, Y) \xrightarrow{\alpha^* \circ \delta} \operatorname{map}(p, \delta Y).$$

Proof. cf [HTT, 4.2.4.3]. □

Theorem 6. *Soit $\mathscr{C}$ une ∞-catégorie . Pour tout $c \in \mathscr{C}$, $\operatorname{map}(c, -) : \mathscr{C} \to$ **Spc** et $\operatorname{map}(-, c) : \mathscr{C}^{op} \to$ **Spc** sont des foncteurs qui commutent aux limites.*

Proof. cf [5.5.2.2]. □

2 Adjonctions

Proposition 7. *Soit $f : \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D} : g$ deux foncteurs entre ∞-catégories . Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1) f est adjoint à gauche[1] *de g.*

2) Il existe $u : \mathbb{1} \to gf$ tel que pour tout $c \in \mathscr{C}, d \in \mathscr{D}$, la composition

$$\mathrm{map}(fc, d) \xrightarrow{g} \mathrm{map}(gfc, gd) \xrightarrow{u_c^*} \mathrm{map}(c, gd)$$

soit une équivalence.

3) Il existe $v : fg \to \mathbb{1}$ tel que pour tout $c \in \mathscr{C}, d \in \mathscr{D}$, la composition

$$\mathrm{map}(c, gd) \xrightarrow{f} \mathrm{map}(fc, fgd) \xrightarrow{(v_c)_*} \mathrm{map}(fc, d)$$

soit une équivalence.

Proof. cf [5.2.2.8]. □

Proposition 8. *Soit $f : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$. Pour que f soit un adjoint à gauche, il suffit d'avoir pour tout $d \in \mathscr{D}$ un objet gd et une flèche $v_d : fgd \to d$ tel que $\mathrm{map}(c, gd) \xrightarrow{f} \mathrm{map}(fc, fgd) \xrightarrow{(v_d)_*} \mathrm{map}(fc, d)$ est une équivalence.*

Proof. cf [gallauer, "∞-catégories , a first course", 3.52]. □

Definition 9. Une ∞-catégorie $\mathscr{C}$ est **présentable** si elle est cocomplète et s'il existe une collection d'objets $S \subseteq \mathscr{C}_0$ compacts qui engendrent $\mathscr{C}$.

Il y a pas mal de poupées russes imbriquées dans cette définition, sortons les une a une :

1) Un objet $s \in S$ est **compact** si pour tout $p : K \to \mathscr{C}$ où K est κ-filtré, on a $\mathrm{map}(c, \mathrm{colim}\, p) = \mathrm{colim}_i\, \mathrm{map}(c, pi)$.

2) Un ensemble simplicial K est **κ-filtré** si tout $p : K' \to K$ avec K' admet un cocône.

3) Un ensemble simplicial K' est **κ-petit** si $|K'_n| < \kappa$, $|\cup K'_n| < \kappa$.

4) Une collection d'objets **engendre** $\mathscr{C}$ si $\mathscr{C}$ est la plus petite sous-catégorie de $\mathscr{C}$ contenant S et qui est stable par colimites κ-filtrées.

Example 10. 1) L'∞-catégorie des espaces **Spc** est présentable.

2) Si $\mathscr{C}$ est une petite ∞-catégorie , $PSh(\mathscr{C})$ est présentable.

3) Plus généralement, si $\mathscr{D}$ est présentable et $\mathscr{C}$ petite, alors $\mathrm{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ est présentable.

4) Toute localisation accessible (c'est-à-diretel qu'il existe un cardinal régulier κ tel que f préserve les colimites κ-filtrées) d'une ∞-catégorie présentable est présentable.

Proposition 11. *Si f est adjoint à gauche à g, alors f preserve les colimites et g les limites.*

Soit $f : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un foncteur d'∞-catégories présentables.

1) f est un adjoint à gauche si, et seulement sif préserve les colimites.

2) f est un adjoint à droite si, et seulement sif préserve les limites et est accessible.

Proof. cf [HTT, 5.2.3.5, 5.5.2.9.]. □

Proposition 12. *Si f est adjoint à gauche de g, alors hof est adjoint à gauche à hog au niveau des catégories d'homotopie.*

Si hof admet un adjoint, alors f aussi.

Proof. cf [HTT, 5.2.2.9, 5.2.2.12.] □

Definition 13. On définit $\mathrm{Fun}^L(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ des foncteurs adjoints à gauche.

Dualement, $\mathrm{Fun}^R(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ des foncteurs adjoints à droite.

[1] On n'a pas défini le fait d'être adjoint à gauche, on se servira de cette caractérisation comme définition.

Proposition 14. *Il y a une équivalence* $\mathrm{Fun}^L(\mathscr{C}, \mathscr{D}) \cong \mathrm{Fun}^R(\mathscr{D}, \mathscr{C})^{op}$ *telle que les foncteurs sont envoyés sur leurs adjoints.*

Proof. cf [HTT, 5.2.6.2]. $\square$

Theorem 15 (Propriété universelle des préfaisceaux)**.** *Soit S un petit ensemble simplicial et $\mathscr{D}$ une ∞-catégorie cocomplète. Alors*

$$\mathrm{Fun}^L(PSh(S), \mathscr{D}) \cong \mathrm{Fun}(S, \mathscr{D}).$$

Proof. cf [HTT, 5.1.5.6]. $\square$

Proposition 16. *Soit $\mathscr{C}$ une ∞-catégorie petite, et $\mathscr{D}$ une ∞-catégorie localement petite cocomplète. Soit $F : PSh(\mathscr{C}) \to \mathscr{D}$ préservant les colimites, étendant $f = F|_{\mathscr{C}}$, $G : \mathscr{D} \to PSh(\mathscr{D}) \to PSh(\mathscr{C})$.*

Alors F est adjoint à gauche à G.

Proof. cf [5.2.6.5]. $\square$