CORRESPONDENCE DE LURIE-GROTHENDIECK ET LEMME DE YONEDA

Davit Eghiazarian

Résumé

Dans cette présentation, on va énoncer la correspondance de Lurie-Grothendieck et equisser la preuve de l'équivalence des fibrations à gauches sur $\mathscr{C}$ et les foncteurs de $\mathscr{C}$ vers **Spc** en suivant [Lan21]. On en donnera ensuite une application pour construire le foncteur de Yoneda, puis pour le théorème de densité de $\mathscr{C}$ dans $\mathrm{PSh}(\mathscr{C})$ pour les ∞-catégories $\mathscr{C}$, et le théorème de la cocomplétion libre. Au passage, on verra les extensions de Kan à gauche, même si ça n'utilise pas le straightening, mais ça peut toujours être utile.

Table des matières

1 Motivation

Catégorie des éléments et construction de Grothendieck Soit $\mathscr{C}$ une catégorie et $F : \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ un préfaisceau d'ensembles dessus. On peut définir la **catégorie des éléments de** F, notée $\int_{\mathscr{C}} F$, comme la catégorie telle que les objets sont les couples (x, e) où $x \in \mathscr{C}$ et $e \in F(x)$, et les morphismes $(x, e) \to (y, e')$ sont donnés par les morphismes $f : x \to y$ dans $\mathscr{C}$ tels que $F(f)(e') = e$. Il existe un foncteur de projection canonique $\pi : \int_{\mathscr{C}} F \to \mathscr{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathscr{C}$, la fibre $\pi^{-1}(x)$ est isomorphe à $F(x)$ en tant que catégorie discrète.
2. Pour tout $f : x \to y$ dans $\mathscr{C}$, et tout $e' \in F(y)$ au-dessus de y ($i.e. (y, e')$), il existe un unique morphisme $e \to e'$ au-dessus de f.

Un foncteur vérifiant ces deux propriétés est appelé **fibration discrète**. Dans ce cas, on peut reconstruire le foncteur F à partir de $\int_{\mathscr{C}} F$, ce qui induit une équivalence de catégories

$$\mathrm{Fun}(\mathscr{C}^{op}, \mathbf{Set}) \cong \mathbf{DFib}(\mathscr{C}),$$

où $\mathbf{DFib}(\mathscr{C})$ est bien sûr la catégorie des fibration discrètes sur $\mathscr{C}$. La correspondence de Lurie-Grothendieck qu'on verra après est une extension de cette propriété au cadre ∞-catégorique, où les fibrations cartésiennes jouent le rôle de fibration discrète.

2 Correspondence de Lurie-Grothendieck

Enoncé On va énoncer dans ce paragraphe la correspondence de Lurie-Grothendieck. L'idée de cette correspondence est, en mimant le phénomène de la section précédente, de fournir une équivalence entre foncteurs compliqués et fibrations faciles. On connaît une structure d'∞-catégories sur les foncteurs compliqués, on va donc en donner une sur les fibrations faciles.

Soit S un ensemble simplicial. On note $\mathbf{CoCart}(S)$ (resp. $\mathbf{Cart}(S)$) la sous-∞-catégorie $(\mathbf{Cat}_\infty)_{/S}$ formée des fibrations cocartésiennes (resp. cartésiennes) et des morphismes respectant la structure sur S et envoyant les arêtes cocartésiennes (resp. cartésiennes) sur des arêtes cocartésiennes (resp. cartésiennes).

Reality check. Les 0-simplexes de $(\mathbf{Cat}_\infty)_{/S}$ sont bien les foncteurs au-dessus de S, puisque c'est par définition $\mathrm{Hom}_S(\underbrace{* * *}_{\Delta^1}, \mathbf{Cat}_\infty)$.

On a alors le théorème suivant.

Théorème 2.1: Correspondence de Lurie-Grothendieck

Soit S un ensemble simplicial. On a des équivalences d'∞-catégories

$$\mathrm{St} : \mathbf{CoCart}(S) \rightleftarrows \mathrm{Fun}(S, \mathbf{Cat}_\infty) : \mathrm{Un},$$

$$\mathrm{St} : \mathbf{Cart}(S) \rightleftarrows \mathrm{Fun}(S^{op}, \mathbf{Cat}_\infty) : \mathrm{Un}.$$

De plus, un préfaisceau $F : S^{op} \to \mathbf{Cat}_\infty$, la fibration cartésienne associée est $p : S_{/F} \to S$, et les fibres $p^{-1}(s)$ sont équivalentes à $F(s)$.

Sous cette équivalence, on dit qu'une fibration (co)cartésienne $p : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ **classifie** le foncteur $S \to \mathbf{Cat}_\infty$ (resp. $S^{op} \to \mathbf{Cat}_\infty$) induit.

On ne peut malheureusement pas démontrer ce magnifique théorème pour plusieurs raisons : l'auteur n'a pas les moyens de comprendre la preuve, et cela dépasserait de loin le temps prévu pour l'exposé ainsi que la portée de ces notes introductives. On peut cependant exposer les idées de la preuve de Lurie comme suit. On commence par considérer la catégorie des ensembles simpliciaux **marqués** $\mathbf{sSet}^+$, c'est-à-dire des paires (S, M) où S est un ensemble simplicial, et $M \subseteq S_1$ est une partie contenant toutes les arêtes dégénérées. Un marquage particulier est $S^\sharp = (S, S_1)$. La suite repose sur la théorie des modèles.

1. On pose une structure de modèle sur $\mathbf{sSet}^+$ telle que l'∞-catégorie sous-jacente soit $\mathbf{Cat}_\infty$.
2. On pose une structure de modèle sur $\mathbf{sSet}^+_{/S^\sharp}$ telle que l'∞-catégorie sous-jacente soit $\mathbf{CoCart}(S)$.
3. La structure de modèle (1) induit une structure de modèle sur $\mathrm{Fun}(\mathfrak{C}[S], \mathbf{sSet}^+)$ dont l'∞-catégorie sous-jacente est $\mathrm{Fun}(S, \mathbf{Cat}_\infty)$.

4. On démontre une équivalence de Quillen (théorème "Straightening-Unstraightening")

$$\mathrm{St}^+ : \mathbf{sSet}_{/S^\sharp} \rightleftarrows \mathrm{Fun}(\mathfrak{C}[S], \mathbf{sSet}^+) : \mathrm{Un}^+.$$

5. On obtient l'équivalence voulue en prenant le nerf de part et d'autre.

Fibrations à gauche (resp. droite) revisitées Rappelons qu'un foncteur $p : E \to S$ est une **fibration à gauche** (resp. **à droite**) si tous les problèmes de relèvement

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & S \end{tikzcd}$$

ont une solution pour $0 \leqslant i < n$ (resp. $0 < i \leqslant n$). On rappelle aussi que les fibrations à gauche (resp. droite) sont des fibration cocartésiennes (resp. cartésiennes). On va réinterpréter cette condition en terme de fibres de la fibration.

Proposition 2.1: [Lur09, Proposition 2.4.2.4.]

Soit $p : E \to S$ une fibration cocartésienne (resp. cartésienne). Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. Le morphisme p est une fibration à gauche (resp. à droite).
2. Les arêtes de E sont p-cocartésiennes (resp. p-cartésiennes).
3. Pour tout $s \in S$, la fibre E_s est un ∞-groupoïde.
4. Le foncteur classifiant p est à valeurs dans $\mathbf{Spc}$.

Démonstration. On démontre l'énoncé "co". La première condition implique clairement la deuxième puisque tous les problèmes de relèvement de cornets à gauche sont satisfaits par hypothèse.

Supposons que les arêtes de E soient toutes p-cocartésiennes, et soit $s \in S$. On utilise le théorème de relèvement de Joyal pour démontrer que $E_s \to *$ est conservatif, c'est-à-dire que E_s est un ∞-groupoïde. Considérons alors un morphisme $\varphi : \Delta^1 \to E_s$. On considère le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} \Delta^{\{0,1\}} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & \Lambda^n_0 \arrow[r] \arrow[d] & E_s \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & E \arrow[d, "p"] \\ & \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] \arrow[urr, dashed, bend right] & * \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

La flèche pointillée courbée vient de ce que $\pi\varphi$ est par hypothèse p-cocartésienne, et la flèche droite en pointillée vient de la propriété universelle du tiré en arrière. Par le théorème de Joyal, E_s est donc un ∞-groupoïde.

Supposons que toutes les fibres sont des ∞-groupoïdes. Soit $\pi : S \to \mathbf{Cat}_\infty$ classifiant p. Sur les 0-simplexes, on sait que π agit en prenant les fibres : $\forall s \in S, \pi(s) = E_s$. Ainsi, sur les 0-simplexes, π est à valeur dans les ∞-groupoïdes. Or, $\mathbf{Spc} \subseteq \mathbf{Cat}_\infty$ est une inclusion pleine comme le montrera le lemme suivant. Ainsi, π est à valeurs dans $\mathbf{Spc}$.

Le point 4. implique immédiatement le point 3.

Supposons que toutes les fibres sont des ∞-groupoïdes. Soit $f : x \to y$ un morphisme de E. Puisque p est cocartésienne, il existe un morphisme p-cocartésien $f' : x \to y'$ tel que $p(f) = p(f')$. Puisque f' est p-cocartésienne, on peut considérer le diagramme qu'il permet de relever en dimension 2 :

$$\begin{tikzcd} \Delta^{\{0,1\}} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "f'"] & \Lambda^2_0 \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ & \Delta^2 \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\sigma"] & S \end{tikzcd}$$

on a donc un 2-simplexe $\sigma \in E_2$ de la forme

$$\begin{tikzcd} & y' \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "f"'] & \sigma & y \end{tikzcd}$$

Mais alors g appartient à la fibre $E_{p(y)}$, donc est une équivalence. Ainsi, f est équivalent à f' qui est p-cocartésienne, donc est p-cocartésienne.

Supposons enfin que les arêtes de E sont p-cocartésiennes. Alors les problèmes

$$\begin{tikzcd} \Delta^{\{0,1\}} \arrow[r] & \Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ & \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & S \end{tikzcd}$$

ont toutes une solution puisque l'arête $\Delta^{\{0,1\}} \hookrightarrow \Lambda^n_0 \to E$ est p-cocartésienne par hypothèse. $\square$

Lemme 2.1

L'inclusion $\mathbf{Spc} \subseteq \mathbf{Cat}_\infty$ est pleine.

Démonstration. Dénotons $Kan, qCat$ les catégories simpliciales des complexes de Kan et des ensembles simpliciaux. Pour rappel, les espaces de morphismes sont données respectivement par $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$ et $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)^{\cong}$. Notons $i : Kan \to qQat$ le foncteur qui est l'identité sur les objets, et qui est le morphisme $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) \to \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)^{\cong}$ sur les espaces de morphismes. Comme X et Y sont des ∞-groupoïdes, il s'avère que ce morphisme est un isomorphisme, donc le foncteur est pleinement fidèle. $\square$

On peut alors raffiner le Théorème 2. Comme pour $\mathbf{CoCart}(S)$ et $\mathbf{Cart}(S)$, notons $\mathbf{LFib}(S)$ (resp. $\mathbf{RFib}(S)$) la sous-catégorie pleine de $(\mathbf{Cat}_\infty)_{/S}$ formée des fibrations à gauche (resp. à droite).

Théorème 2.2

Soit S un ensemble simplicial. Les correspondences de Lurie-Grothendieck se restreignent en des équivalences d'∞-catégories

$$\mathrm{St} : \mathbf{LFib}(S) \rightleftarrows \mathrm{Fun}(S, \mathbf{Spc}) : \mathrm{Un},$$

$$\mathrm{St} : \mathbf{RFib}(S) \rightleftarrows \mathrm{Fun}(S^{op}, \mathbf{Spc}) : \mathrm{Un}.$$

Démonstration. On commence par démontrer que les domaines et codomaines sont bien définies. Soit $F : S \to \mathbf{Spc}$ un foncteur. La composition $S \xrightarrow{F} \mathbf{Spc} \hookrightarrow \mathbf{Cat}_\infty$ classifie une fibration cocartésienne $p : \mathscr{E} \to S$. Pour tout $s \in S$, la fibre $\mathscr{E}_s$ est $F(s)$ et est donc un ∞-groupoïde. Par la proposition précédente, p est donc une fibration à gauche. De manière générale, soit $\sigma \in \mathrm{Fun}(S, \mathbf{Spc})_n$. On veut montrer que $\mathrm{Un}\sigma \in \mathbf{LFib}(S)_n$. Par définition de $\mathbf{LFib}(S)$, il suffit de montrer que les sommets de $\mathrm{Un}\sigma$ sont des fibrations à gauche. Mais $(\mathrm{Un}\sigma)|_{\Delta^{\{i\}}} = \mathrm{Un}\sigma|_{\Delta^{\{i\}}}$ donc on conclut par l'analyse précédente.

On veut maintenant montrer la pleine-fidélité et l'essentielle surjectivité. L'argument précédent montre l'essentielle surjectivité. De plus, si $p, q \in LFib(S)$, alors on a $\mathrm{map}_{\mathbf{LFib}(S)}(p,q) \cong \mathrm{map}_{\mathbf{CoCart}(S)}(p,q)$. En effet, si $f : p \to q$ est un morphisme, alors f envoie les arêtes p-cocartésiennes sur des arêtes q-cocartésiennes puisque toutes les arêtes sont p-cocartésiennes : c'est donc un morphisme de fibrations cocartésiennes. Ainsi, par la correspondence de Lurie-Grothendieck, on a

$$\mathrm{map}_{\mathbf{LFib}(S)}(p,q) \cong \mathrm{map}_{\mathrm{Fun}(S,\mathbf{Cat}_\infty)}(\mathrm{St}p, \mathrm{St}q).$$

Or, $\mathrm{Fun}(S, \mathbf{Spc}) \subseteq \mathrm{Fun}(S, \mathbf{Cat}_\infty)$ est une sous-catégorie pleine, et on a vu que $\mathrm{St}p$ et $\mathrm{St}q$ sont dans $\mathrm{Fun}(S, \mathbf{Spc})$. Ainsi, $\mathrm{map}_{\mathrm{Fun}(S,\mathbf{Cat}_\infty)}(\mathrm{St}p, \mathrm{St}q) \cong \mathrm{map}_{\mathrm{Fun}(S,\mathbf{Spc})}(\mathrm{St}p, \mathrm{St}q)$. Ainsi,

$$\mathrm{map}_{\mathbf{LFib}(S)}(p,q) \cong \mathrm{map}_{\mathrm{Fun}(S,\mathbf{Spc})}(\mathrm{St}p, \mathrm{St}q),$$

ce qui montre la pleine-fidélité. $\square$

3 Lemme de Yoneda

Le lemme de Yoneda classique dit qu'une catégorie se plonge pleinement fidèlement dans sa catégorie des préfaisceaux d'ensembles et que ce plongement est donné par $X \mapsto \mathrm{Hom}(-, X)$. Le problème quand on veut prolonger ce résultats aux ∞-catégories est que notre définition de l'espace des morphismes n'est pas fonctoriel. Soit $\mathscr{C}$ une ∞-catégorie et $x \in \mathscr{C}$, alors $\mathrm{map}_{\mathscr{C}}(-, x)$ ne définit pas un foncteur $\mathscr{C}^{op} \to \mathbf{Spc}$. Par exemple, si on a $f : y \to y'$ un morphisme de $\mathscr{C}$, le diagramme suivant ne commute pas donc n'induit pas de morphisme $\mathrm{map}_{\mathscr{C}}(y', x) \to \mathrm{map}_{\mathscr{C}}(y, x)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{map}_{\mathscr{C}}(y',x) \arrow[drr, bend left] \arrow[dddr, bend right] & & \\
& \mathrm{map}_{\mathscr{C}}(y,x) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Fun}(\Delta^1,\mathscr{C}) \arrow[d] \\
& * \arrow[r, "{(y,x)}"'] \arrow[d, equal] & \mathscr{C}\times\mathscr{C} \\
& * \arrow[ur, bend right, "{(y',x)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Au vu de ce qui a été fait précedemment, il n'est pas étonnant que pour définir un *foncteur* $\mathscr{C}^{op} \to \mathbf{Spc}$, on soit amené à définir en fait une fibration à gauche $\mathscr{E} \to \mathscr{C}$, pour une certaine catégorie $\mathscr{E}$.

On rappelle que pour un objet $x \in \mathscr{C}$, on peut définir les ∞-catégories tranches $\mathscr{C}_{x/}$ et $\mathscr{C}_{/x}$ dont les n-simplexes sont donnés par

$$(\mathscr{C}_{x/})_n = \mathrm{Hom}_x(* \star \Delta^n, \mathscr{C}),$$
$$(\mathscr{C}_{/x})_n = \mathrm{Hom}_x(\Delta^n \star *, \mathscr{C}),$$

et que ces ∞-catégories viennent avec des projections $\mathscr{C}_{x/} \to \mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_{x/} \to \mathscr{C}$. Il s'avère que ces foncteurs sont des fibrations à gauche et à droite respectivement, et via la correspondance de Lurie-Grothendieck, ils induisent des foncteurs $\mathrm{map}_{\mathscr{C}}(x, -)$ et $\mathrm{map}_{\mathscr{C}}(-, x)$ respectivement.

Maintenant, on construit un foncteur à deux entrées $\mathrm{map}_{\mathscr{C}}(-, -) : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to \mathbf{Spc}$. Pour cela bien sûr, il faut définir une fibration à droite ? $\to \mathscr{C} \times \mathscr{C}^{op}$. Pour le point d'interrogation, on prend l'∞-catégorie **twisted arrow category** définie par

$$\mathrm{Tw}(\mathscr{C})_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n \star (\Delta^n)^{op}, \mathscr{C}),$$

et la flèche vers $\mathscr{C} \times \mathscr{C}^{op}$ provient des morphismes canoniques $\Delta^n \to \Delta^n \star (\Delta^n)^{op} \leftarrow (\Delta^n)^{op}$, induisant $\mathscr{C}_n \to \mathrm{Tw}(\mathscr{C})_n \leftarrow (\mathscr{C}^{op})_n$, donc $\mathrm{Tw}(\mathscr{C}) \to \mathscr{C} \times \mathscr{C}^{op}$. Il s'agit d'une fibration à droite par [Lan21, Proposition 4.2.4.], donc il est classifié par un foncteur $\mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to \mathbf{Spc}$, que l'on note $\mathrm{map}_{\mathscr{C}}(-, -)$.

Définition 3.1: Foncteur de Yoneda

Le foncteur $\mathrm{map}_{\mathscr{C}}(-, -) : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to \mathbf{Spc}$ est adjoint à un foncteur $y : \mathscr{C} \to \mathrm{Fun}(\mathscr{C}^{op}, \mathbf{Spc}) = \mathrm{PSh}(\mathscr{C})$ que l'on appelle **foncteur de Yoneda**.

On peut alors énoncer les deux versions du lemme de Yoneda.

Théorème 3.1: Lemme de Yoneda

Soit $\mathscr{C}$ une ∞-catégorie, $F : \mathscr{C} \to \mathbf{Spc}$ un foncteur et $x \in \mathscr{C}$. On a alors une équivalence

$$\mathrm{map}_{\mathrm{Fun}(\mathscr{C}, \mathbf{Spc})}(\mathrm{map}_{\mathscr{C}}(x, -), F) \xrightarrow{\sim} F(x).$$

De plus, le foncteur de Yoneda est pleinement fidèle.

Démonstration. Soit $p : \mathscr{E} \to \mathscr{C}$ la fibration à gauche classifiée par F. En appliquant l'équivalence Un au membre de gauche, on trouve

$$\mathrm{map}_{\mathrm{Fun}(\mathscr{C}, \mathbf{Spc})}(\mathrm{map}_{\mathscr{C}}(x, -), F) \cong \mathrm{map}_{\mathbf{LFib}(\mathscr{C})}(\mathscr{C}_{x/}, p) \cong \mathrm{Fun}_q(\mathscr{C}_{x/}, \mathscr{E}),$$

où $q : \mathscr{C}_{x/} \to \mathscr{C}$ est le foncteur de projection. De plus le membre de droite est équivalent à $\mathscr{E}_x$ par Lurie-Grothendieck. Il ne reste plus qu'à montrer l'équivalence $\mathrm{Fun}_q(\mathscr{C}_{x/}, \mathscr{E}) \cong \mathscr{E}_x$ pour conclure. On renvoie le lecteur à [Lan21, Proposition 4.2.10.] pour la fin de la preuve, et à [Lan21, Proposition 4.2.11.] pour le second énoncé. □

4 Applications

4.1 Extensions de Kan

Rappelons le contexte catégorique classique des extensions de Kan. Soit $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ des catégories et $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ et $X : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ des foncteurs. Si $F^* : \mathrm{Fun}(\mathscr{B}, \mathscr{C}) \to \mathrm{Fun}(\mathscr{A}, \mathscr{C})$ admet un adjoint à gauche ou à droite $\mathrm{Fun}(\mathscr{B}, \mathscr{C}) \leftarrow \mathrm{Fun}(\mathscr{A}, \mathscr{C})$, alors l'appliquer à $X \in \mathrm{Fun}(\mathscr{A}, \mathscr{C})$ fournit l'extension de Kan à gauche de X le long de F ou l'extension de Kan à droite de X le long de F. Dans le monde des ∞-catégories , on a la définition suivante.

Définition 4.1

Soit $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ des ∞-catégories , et $\mathscr{C}^0 \subseteq \mathscr{C}$ une sous-∞-catégorie pleine de $\mathscr{C}$. Supposons qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}^0 \arrow[r, "F_0"] \arrow[d, hook] & \mathscr{D} \\ \mathscr{C} \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

On dit que F est une **extension de Kan de F_0 à gauche** si pour tout $C \in \mathscr{C}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}^0_{/C} \arrow[r, "F_C"] \arrow[d, hook] & \mathscr{D} \\ (\mathscr{C}^0_{/C})^{\triangleright} \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

fait de $F(C)$ une colimite de F_C.

Théorème 4.1: Existence des extensions de Kan

Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ des ∞-catégories , $\mathscr{C}^0$ une sous-∞-catégorie pleine de $\mathscr{C}$, et $F_0 : \mathscr{C}^0 \to \mathscr{D}$. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. Le foncteur F_0 admet une extension de Kan à gauche F.
2. Pour tout $C \in \mathscr{C}$, la composition $\mathscr{C}^0_{/C} \to \mathscr{C}^0 \xrightarrow{F_0} \mathscr{D}$ admet une colimite.

Démonstration. Soit A l'ensemble des simplexes $\sigma : \Delta^n \to \mathscr{C}$ tels que $\sigma(0) \notin \mathscr{C}^0$. On prend un bon ordre sur A tel que $\sigma < \tau$ si $\dim \sigma < \dim \tau$. Pour tout $\sigma \in A$, il existe un i maximal tel que $\sigma(i) \notin \mathscr{C}^0$. On pose alors $r(\sigma) = \sigma|_{\Delta^{\{i,i+1,\ldots,n\}}}$. Soit α le type d'ordre de A. On a alors une bijection croissante $\beta \mapsto \sigma_\beta$ pour $\beta \leqslant \alpha$. Alors pour tout ordinal $\beta \leqslant \alpha$, on pose $\mathscr{C}_\beta$ le sous-ensemble simplicial de $\mathscr{C}$ dont les simplexes non dégénérés σ sont soit dans $\mathscr{C}^0$ soit sont tels que $r(\sigma) = \sigma_\gamma$ pour $\gamma < \alpha$. Pour $\beta = 0$, posons $F_\beta = F_0$, et si β est un ordinal limite, on pose $F_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} F_\gamma$, et construisons des F_β par récurrence, jusqu'à poser $F = F_\alpha$. Supposons alors qu'on a déjà défini F_β, et construisons $F_{\beta+1}$. Si $\sigma = \sigma_\beta \in A$ est un objet $C \in \mathscr{C}$, on a un pushout

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}^0_{/C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{C}_\beta \arrow[d] \\ \mathscr{C}^0_{/\sigma} \star * \arrow[r] & \mathscr{C}_{\beta+1} \end{tikzcd}$$

Pour définir F_β, il suffit alors de résoudre le problème

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}^0_{/C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{D} \\ (\mathscr{C}^0_{/C})^{\triangleright} \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Or on peut le résoudre en choisissant une colimite (par hypothèse). Il y a deux autres cas à traiter, voir [Lur09, Theorem 4.3.2.13]. Le foncteur F obtenu est alors par construction une extension de Kan à gauche de F_0.

□

Remarque 4.1. Une application immédiate du théorème précédent est dans le cas où $\mathscr{D}$ est cocomplète, dans quel cas le condition 2. est automatiquement satisfaite, assurant l'existence d'une extension de Kan à gauche.

4.2 Théorème de densité

La référence principale suivie dans cette partie est [Gal23]. Rappelons un théorème important de la théorie des catégories : le théorème de la cocomplétion libre. Il dit tout simplement qu'étant donnée une catégorie $\mathscr{C}$, la catégorie des préfaisceaux dessus vérifie la propriété universelle de la cocomplétion libre, *i.e.*tout foncteur $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$, avec $\mathscr{D}$ cocomplète, se factorise de manière unique en un foncteur $\mathrm{PSh}(\mathscr{C}) \to \mathscr{D}$ préservant les colimites.

La preuve repose sur le théorème de densité, disant que tout préfaisceau est la colimite sur sa catégorie des éléments des représentables. L'idée est alors de définir l'isomorphisme réciproque en prenant la colimite dans $\mathscr{D}$ de ces valeurs. Sachant que la catégorie des éléments se généralise ∞-catégoriquement en la correspondance de Lurie-Grothendieck, on s'attend à retrouver le théorème de densité et le théorème de cocomplétion libre dans le monde des ∞-catégories également.

Lemme 4.1: Théorème de densité

Soit $\mathscr{C}$ une ∞-catégorie , et $F \in \mathrm{PSh}(\mathscr{C})$. Le foncteur canonique $(\mathscr{C}_{/F})^{\triangleright} \to \mathrm{PSh}(\mathscr{C})$ exhibe F en tant que colimite de représentables

Démonstration. Montrer que $(\mathscr{C}_{/F})^{\triangleright} \to \mathrm{PSh}(\mathscr{C})$ est une colimite revient à montrer que pour tout $c \in \mathscr{C}$, le diagramme

$$(\mathscr{C}_{/F})^{\triangleright} \to \mathrm{PSh}(\mathscr{C}) \xrightarrow{\mathrm{ev}_c} \mathbf{Spc}$$

est un diagramme colimite. Par le lemme de Yoneda, évaluer en c c'est appliquer $\mathrm{Fun}(y_c, -) : \mathrm{PSh}(\mathscr{C}) \to \mathbf{Spc}$. De plus, la fibration à gauche qui classifie ce foncteur est $\mathrm{PSh}(\mathscr{C})_{c/} \to \mathrm{PSh}(\mathscr{C})$. Ainsi, la composition ci-haut classifie la projection

$$E = (\mathscr{C}_{/F})^{\triangleright} \times_{\mathrm{PSh}(\mathscr{C})} \mathrm{PSh}(\mathscr{C})_{c/} \to (\mathscr{C}_{/F})^{\triangleright}.$$

Être une colimite se traduit, dans le membre de gauche de la correspondence de Lurie-Grothendieck, que

$$E^0 = \mathscr{C}_{/F} \times_{\mathscr{C}} \mathscr{C}_{c/} \hookrightarrow E$$

est une équivalence d'homotopie faible. Pour la preuve de cet énoncé, on peut se référer à [Gal23, Lemma 4. 9.]

□

Théorème 4.2: Cocomplétion libre

Soit $\mathscr{C}$ une ∞-catégorie , et $\mathscr{D}$ une ∞-catégorie cocomplète. La restriction induit une équivalence

$$\mathrm{Fun}^L(\mathrm{PSh}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D}),$$

où $\mathrm{Fun}^L(\mathrm{PSh}(\mathscr{C}), \mathscr{D})$ est la sous-catégorie pleine engendrée par les foncteurs préservant les colimites.

Références

[Gal23] Martin Gallauer. *∞-categories : a first course*. 2023. url : https://mgallauer.warwick.ac.uk/teaching/23icats/icats.pdf.

[Lan21] Markus Land. *Introduction to infinity-categories*. Springer Nature, 2021.

[Lur09] Jacob Lurie. *Higher topos theory*. Princeton University Press, 2009.