CONJECTURE DE CALABI ET APPLICATIONS

Dorian Boully

dimanche 30 novembre 2025

Table des matières

1. Préliminaires 1
   1.1. Transport Parallèle, Holonomie et classification de Berger 1
   1.2. Variétés Kählériennes 2
   1.3. Revêtements riemanniens et décomposition de de Rham 2
2. Conjecture de Calabi 4
   2.1. Esquisse de preuve de la conjecture de Calabi 4
3. Applications 6
   3.1. Métriques de Kähler Ricci-plates 6
   3.2. Classification grossière des variétés kählériennes 6
   3.3. Variétés de Calabi-Yau de dimension $\geqslant 3$ 8
Bibliographie 8

1. Préliminaires

Cette section contient des rappels issus des exposés précédents (voir les notes correspondantes pour plus de détails) qui nous seront utiles, ainsi que des résultats généraux de géométrie riemannienne.

Toutes les variétés considérées dans ces notes seront connexes.

1.1. Transport Parallèle, Holonomie et classification de Berger

Soit M une variété lisse, $E \to M$ un fibré vectoriel sur M et ∇ une connexion sur E. Étant donnés un point $x \in M$, un vecteur $e \in E_x$ et une boucle $\gamma : S^1 \to M$ lisse par morceaux en x, il existe une unique section $s : [0,1] \to E$ telle que $s(0) = e$, et $\nabla_{\gamma(t)} \cdot s(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Cela définit un isomorphisme linéaire $e \mapsto s(1)$ de E_x. On obtient ainsi un groupe $\mathrm{Hol}(\nabla)$ (qui ne dépend du point x qu'à conjugaison près). Dans le cas où M est munie d'une métrique riemannienne g, E est le fibré tangent de M et ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à g, on note $\mathrm{Hol}(g) := \mathrm{Hol}(\nabla)$, et l'on parle du groupe d'holonomie de g.

Définition 1.1.1 (Produit riemannien). *Soient $(P,g), (Q,h)$ deux variétés riemanniennes. On munit $P \times Q$ de la métrique $g \oplus h : ((u,u'),(v,v')) \mapsto g(u,v) + h(u',v')$. On obtient une variété riemannienne $(P,g) \times (Q,h)$ appelée produit riemannien de P et Q.*

Dans le produit $(P,g) \times (Q,h)$, l'espace tangent au point (p,q) s'identifie à la somme directe orthogonale

$$T_{p,q}(P \times Q) \simeq T_pP \overset{\perp}{\oplus} T_qQ \tag{1.1}$$

Définition 1.1.2. *On dit qu'une variété riemannienne (M, g) est localement (globalement) réductible si elle est localement (globalement) isométrique à un produit riemannien non trivial. Si ce n'est pas le cas, elle est dite localement (globalement) irréductible.*

Définition 1.1.3. *On dit qu'une variété riemannienne M est un espace symétrique si, pour tout point $p \in M$, il existe une isométrie involutive de M dont p est un point fixe isolé.*

Remarque 1.1.4. Les espaces symétriques ont été classifiés par Élie Cartan en 1925 en utilisant la théorie des groupes de Lie. En particulier, on se servira du fait que les seuls espaces symétriques Ricci-plats sont les espaces euclidiens.

Théorème 1.1.5 (Classification de Berger). *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n, simplement connexe, localement irréductible et asymétrique. Alors le groupe d'holonomie de g est l'un des sept suivants :*
1. $\mathrm{SO}(n)$;
2. $U(m) \subset \mathrm{SO}(2m)$, *avec* $n = 2m$ *et* $m \geqslant 2$;
3. $\mathrm{SU}(m) \subset \mathrm{SO}(2m)$, *avec* $n = 2m$ *et* $m \geqslant 2$;
4. $\mathrm{Sp}(m) \subset \mathrm{SO}(4m)$, *avec* $n = 4m$ *et* $m \geqslant 2$;
5. $\mathrm{Sp}(m)\,\mathrm{Sp}(1) \subset \mathrm{SO}(4m)$, *avec* $n = 4m$ *et* $m \geqslant 2$;
6. $G_2 \subset \mathrm{SO}(7)$, *avec* $n = 7$;
7. $\mathrm{Spin}(7) \subset \mathrm{SO}(2m)$, *avec* $n = 8$.

1.2. Variétés Kählériennes

Une variété riemannienne complexe (M, J, g) est dite kählérienne si
1. g est hermitienne, i.e. $g(Ju, Jv) = g(u, v)$ pour tous $x \in M$ et u, vT_xM ;
2. La $(1, 1)$-forme $\omega = g(J-, -)$ associée à g est fermée.

On utilisera le fait que la condition 2. est équivalente à $\nabla J = 0$, où ∇ désigne la connexion de Levi-Civita de g. Dans le cas où les conditions sont remplies, on appelle ω la forme de Kähler de g.

Définition 1.2.1 (Cône de Kähler). *Soit (M, J) une variété complexe. Le cône de Kähler de M est l'ensemble des classes de $H^{1,1}(M; \mathbb{R})$ dont l'un des représentants est la forme de Kähler d'une métrique kählérienne. On le note généralement $\mathcal{K}_M$, ou bien $\mathcal{K}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.*

Proposition 1.2.2. *Le cône de Kähler d'une variété kählérienne M est un cône convexe. Si l'on suppose de plus que M est compacte, alors $\mathcal{K}_M$ est un ouvert de $H^{1,1}(M; \mathbb{R})$.*

1.3. Revêtements riemanniens et décomposition de de Rham

On rassemble ici des résultats qui nous seront utiles dans la Section 3.2 pour montrer le Théorème 3.2.2

Définition 1.3.1. *Soit $\pi : \overline{M} \to M$ un revêtement, avec $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ et (M, g) deux variétés riemanniennes. On dit que ce revêtement est riemannien si*

$$\overline{g} = \pi^*(g). \tag{1.2}$$

Lemme 1.3.2. *Soit $\pi : \overline{M} \to M$ un revêtement. Si M est munie d'une structure complexe, il existe une unique structure complexe sur $\overline{M}$ qui rend le revêtement holomorphe. Si ce revêtement est riemannien et que la métrique de M est Ricci-plate/hermitienne/kählérienne, alors c'est également le cas pour la métrique sur $\overline{M}$.*

Démonstration. Un revêtement est un isomorphisme local, et toutes les propriétés citées dans l'énoncé du Lemme 1.3.2 sont locales. On peut donc les transporter à $\overline{M}$ en tirant en arrière par π. Plus précisément : notons $\bar{J} = \pi^*(J)$ la tirée en arrière de la structure complexe sur M. Alors $\bar{J}$ est une structure complexe sur $\overline{M}$, ce qui se voit par exemple en considérant la définition par les atlas, ou en utilisant le fait que le crochet de Lie est compatible avec la tirée en arrière dans le calcul du tenseur de Nijenhuis. En tenant compte des structures complexes, π est holomorphe. De plus, si g est hermitienne, $x \in \overline{M}$ et $u, v \in T_x\overline{M}$, on a

$$\begin{aligned} \overline{g}\big(\bar{J}u, \bar{J}v\big) &= \pi^* g((\pi^* J) \cdot u, (\pi^* J) \cdot v) \\ &= \pi^* [g(J -, J -)] \cdot (u, v) \\ &= \pi^* g(u, v) \\ &= \overline{g}(u, v). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ainsi, $\overline{g}$ est hermitienne dès que g l'est. Par compatibilité entre la tirée en arrière et la différentielle extérieure, on voit également que la forme de Kähler de $\overline{g}$ est fermée dès que celle de g l'est. La courbure de Riemann, et donc de Ricci est également préservée en vertu du fait que π est une isométrie locale. □

L'ingrédient principal dont nous allons nous servir pour montrer le Théorème 3.2.2 est le théorème de décomposition de de Rham, qui est difficile. Voir [1] pour une esquisse de preuve.

Théorème 1.3.3 (Décomposition de de Rham). *Soit (M, g) une variété riemannienne complète simplement connexe. Si l'action de $\mathrm{Hol}(g)$ sur TM n'est pas irréductible, alors M est globalement réductible.*

La condition « l'action de $\mathrm{Hol}(g)$ sur TM n'est pas irréductible » signifie que pour tout $x \in M$, l'action de $\mathrm{Hol}_x(g)$ sur T_xM possède un sous espace stable non trivial. Les groupes d'holonomie aux différents points étant conjugués, il suffit de faire la vérification en un seul point. En itérant ce procédé, on parvient à décomposer toute variété riemannienne complète simplement connexe en un produit de variétés globalement irréductibles.

Les théorèmes suivants sont des résultats de type « local-global », reliant respectivement la courbure à l'holonomie et la courbure à la structure globale de la variété. On rappelle que les groupes d'holonomie sont des groupes de Lie.

Théorème 1.3.4 (d'holonomie d'Ambrose-Singer [1, 10.58 Theorem], [2]). *Soit (M, g) une variété riemannienne. On fixe $p \in M$. Alors*

$$\mathfrak{hol}_p(g) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{\tau_\gamma^{-1} \circ R_q(u, v) \circ \tau_\gamma \ ; q \in M, \gamma : p \rightsquigarrow q, u, v \in T_qM\right\} \subset \mathfrak{so}\left(T_pM\right), \tag{1.4}$$

où $\mathfrak{hol}_p(g)$ est l'algèbre de Lie de $\mathrm{Hol}_p(g)$, γ parcourt l'ensemble des chemins lisses par morceaux reliant p à q, $\tau_\gamma : T_pM \to T_qM$ est le transport parallèle, et $R_q(u, v) : T_qM \to T_qM$ est la courbure en q.

En particulier, si $\mathrm{Hol}(g) = \{\mathrm{id}\}$, son algèbre de Lie (en un point quelconque) est nulle, et on déduit $R_q = 0$ pour tout $q \in M$, i.e. M est plate.

Théorème 1.3.5 (Hadamard-Cartan [3, Corollary 8.2]). *Soit (M, g) une variété riemannienne. Si M est complète, simplement connexe et plate, alors pour tout point $x \in M$, l'application*

$$\exp_x : T_xM \longrightarrow M \tag{1.5}$$

est une isométrie. En particulier, M est euclidienne.

2. Conjecture de Calabi

On a vu lors de l'exposé précédent que la forme de Ricci ρ d'une métrique kählérienne est une $(1,1)$-forme réelle fermée telle que

$$[\rho] = 2\pi c_1(M) \in H^2(M, \mathbb{R}). \tag{2.1}$$

La conjecture de Calabi, posée par ce dernier en 1954 et prouvée par Yau en 1976, s'intéresse à la réciproque : étant donnée ρ satisfaisant ces propriétés, peut-on retrouver une métrique kählérienne dont la forme de Ricci est ρ et si oui, combien en existe-t-il ?

Conjecture 2.1 (Calabi). *Soient (M, J) une variété complexe compacte et g une métrique kählérienne, de forme de Kähler ω. Soit ρ' une $(1,1)$-forme réelle fermée telle que*

$$[\rho'] = 2\pi c_1(M) \in H^2(M, \mathbb{R}). \tag{2.2}$$

Alors, il existe une unique métrique kählérienne g', dont la forme de Kähler ω' est dans la classe de Kähler de ω, et dont la forme de Ricci est ρ'.

2.1. Esquisse de preuve de la conjecture de Calabi

On suit de près [4, Section 5.1]. La première étape est de se ramener à une équation aux dérivées partielles non linéaire d'ordre 2 sur un potentiel de la différence de deux formes kählériennes. Il s'agit ensuite de montrer que cette équation est bien posée. Soit (M, J) une variété complexe compacte de dimension complexe m, soient g, g' deux métriques de Kähler sur M dans la même classe de Kähler, dont on note respectivement w, w' les formes de Kähler et ρ, ρ' les formes de Ricci. Comme ω^m, $(\omega')^m$ sont des formes volume, il existe une unique fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}$ telle que

$$(w')^m = \exp(f)\omega^m. \tag{2.3}$$

On obtient alors (cf. Exposé 2)

$$\rho' = \rho - i\partial\overline{\partial}f. \tag{2.4}$$

Les métriques g et g' étant de même classe de Kähler, on a $[\omega] = [\omega'] \in H^2(M; \mathbb{R})$, donc

$$[\omega^m] = [\omega]^m = [\omega']^m = [(\omega')^m] \in H^{2m}(M; \mathbb{R}). \tag{2.5}$$

On en déduit

$$\int_M \omega^m = \int_M (\omega')^m = \int_M \exp(f)\omega^m. \tag{2.6}$$

Proposition 2.1.1. *Soit (M, J, g) une variété kählérienne, de forme de Kähler ω et de forme de Ricci ρ. Soit ρ' une $(1,1)$-forme réelle fermée vérifiant $[\rho] = 2\pi c_1(M) \in H^2(M, \mathbb{R})$. Alors, il existe une unique fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\rho' = \rho - i\partial\overline{\partial}f \quad \text{et} \quad \int_M \omega^m = \int_M \exp(f)\omega^m. \tag{2.7}$$

De plus, une métrique kählérienne g' de forme de Kähler ω' de même classe que g admet ρ' pour forme de Ricci si et seulement si

$$(\omega')^m = \exp(f)\omega^m. \tag{2.8}$$

Démonstration. D'après le Lemme-$\partial\overline{\partial}$ (cf. Exposé 2), il existe une fonction lisse $M \to \mathbb{R}$ satisfaisant la première condition de (2.7), unique à constante près. La deuxième condition garantit l'unicité. On obtient la deuxième assertion d'après la discussion précédente et l'unicité de f satisfaisant (2.7). □

Conjecture 2.1.2 (Calabi, 2^e version). *Soit (M, J) une variété complexe compacte, g une métrique kählérienne sur M, de forme de Kähler ω. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse telle que*

$$\int_M \exp(f)\omega^m = \int_M \omega^m. \tag{2.9}$$

Alors, il existe une unique fonction lisse $\varphi : M \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois conditions suivantes.
1. *$\omega + i\partial\overline{\partial}\varphi$ est la forme de Kähler d'une métrique kählérienne ;*
2. *φ vérifie la condition de normalisation*

$$\int_M \varphi\omega^m = 0\ ; \tag{2.10}$$

3. *$\left(\omega + i\partial\overline{\partial}\varphi\right)^m = \exp(f)\omega^m$.*

Cette deuxième version présente l'avantage qu'elle ne fait pas intervenir les formes de Ricci, qui dépendent de la dérivée seconde de la métrique. À la place, on cherche une métrique kählérienne de forme volume prescrite. La forme volume dépend directement de la métrique, pas de ses dérivées.

Proposition 2.1.3. *Les deux versions de la conjecture de Calabi sont équivalentes.*

Démonstration. Supposons l'énoncé de la Conjecture 2.1 vrai. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ lisse vérifiant (2.9). On pose $\rho' = \rho - i\partial\overline{\partial}f$. C'est une $(1, 1)$-forme réelle fermée vérifiant (2.2). Il existe donc par la Conjecture 2.1 une unique métrique g' kählérienne de forme de Ricci ρ' de même classe que g. On a donc $[\omega' - \omega] = 0 \in H^2(M; \mathbb{R})$, où ω' désigne la forme de Kähler de g'. D'après le Lemme-$\partial\overline{\partial}$, il existe $\varphi : M \to \mathbb{R}$ lisse telle que $\omega' = \omega + i\partial\overline{\partial}\varphi$, unique à constante près. En imposant en plus la condition de normalisation (2.10), une telle fonction est unique. On applique alors la Proposition 2.1.1, qui montre que φ vérifie la condition 3. de la Conjecture 2.1.2. Réciproquement, supposons l'énoncé de la Conjecture 2.1.2 vrai. On se donne une $(1, 1)$ -forme réelle fermée ρ' vérifiant (2.2). Soit $f : M \to \mathbb{R}$ l'unique fonction lisse donnée par la Proposition 2.1.1. On applique la Conjecture 2.1.2, qui nous donne une unique $\varphi : M \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions 1, 2 et 3. D'après 1, $\omega' := \omega + i\partial\overline{\partial}\varphi$ provient d'une métrique kählérienne g', et $[\omega'] = [\omega]$. La condition 3 et la deuxième assertion de la Proposition 2.1.1 nous dit que la forme de Ricci de g' est ρ'. Enfin, si g'' était une deuxième métrique kählérienne de même classe et de forme de Ricci ρ', le raisonnement que l'on a fait dans le sens direct nous donnerait l'existence de $\psi : M \to \mathbb{R}$ lisse qui vérifie 1, 2 et 3. Par unicité dans la Conjecture 2.1.2, il vient $\psi = \varphi$, puis $\omega'' = \omega'$, puis $g'' = g'$. D'où le résultat. □

La condition 3 de la Conjecture 2.1.2 est une équation aux dérivées partielles du second ordre non linéaire sur φ. Yau a montré l'existence d'une unique solution vérifiant 1 et 2, en utilisant l'homotopie $f_t := tf + c_t$, où, pour $t \in [0, 1]$, c_t est l'unique réel tel que

$$\int_M \exp(f_t)\omega^m = \int_M \omega^m. \tag{2.11}$$

Il a ensuite considéré l'ensemble S des $t \in [0, 1]$ tels que le problème donné par les conditions 1, 2 et 3 associées à f_t admet une unique solution. S contient 0 car pour $f_0 = 0$, $\varphi = 0$ est l'unique solution. Il a ensuite montré que S est un ouvert-fermé de $[0, 1]$, pour conclure par connexité $S = [0, 1]$. Comme $c_1 = 0$, on a $f_1 = f$, et la conjecture est démontrée. La preuve du fait que S est ouvert n'est pas spécialement difficile, mais utilise des outils classiques d'analyse (3. est une E.D.P. elliptique), dont nous ne disposons pas. Calabi avait déjà obtenu ce résultat. La partie difficile est le fait que S est fermé. Si t_k est une suite de points de S qui converge dans $[0,1]$, on obtient une suite φ_k de solutions associées à chaque f_{t_k}. Si l'on parvient à montrer que φ_k converge vers une fonction $\varphi : M \to \mathbb{R}$ lisse satisfaisant 1, 2 et 3, on en déduit que la limite des t_k est encore dans S. Or, il n'est pas du tout évident que la suite (φ_k) converge, et que si elle converge, la limite est lisse. Les estimations sur les φ_k qui l'ont permis ont été difficiles à trouver en raison de la non linéarité en φ_k de l'équation $\left(\omega + i\partial\overline{\partial}\varphi_k\right)^m = \exp\left(f_{t_k}\right)\omega^m$.

3. Applications

On s'intéresse ici uniquement au cas où $c_1(M) = 0$.

3.1. Métriques de Kähler Ricci-plates

Une première conséquence de la conjecture de Calabi est que dès qu'une variété complexe admet une structure kählérienne, alors elle en admet plein. Cela permet, dans le cas $c_1(M) = 0$, de construire des variétés kählériennes Ricci-plates, comme les variétés de Calabi-Yau et les variétés hyperkählériennes. Fixons (M,J) une variété complexe compacte, de première classe de Chern nulle. On considère l'application qui, à une métrique kählérienne Ricci-plate g associe sa classe de Kähler $[\omega] \in \mathcal{K}_M$. Cette application respecte la structure de cône, et la conjecture de Calabi nous dit que c'est même une bijection. Ainsi, on montre

Théorème 3.1.1. *Les métriques kählériennes Ricci-plates sur M forment une famille lisse (éventuellement vide) de dimension $h^{1,1}(M)$, isomorphe au cône de Kähler $\mathcal{K}_M$.*

3.2. Classification grossière des variétés kählériennes

Un premier pas vers la classification des variétés kählériennes est d'en exhiber des revêtements finis particuliers. C'est pour cela qu'on parle de classification grossière.

On a le résultat général suivant sur les variétés riemanniennes. On reprend l'énoncé de [4], qui est une conséquence du théorème de scindement de Cheeger-Gromoll [5], [6]

Théorème 3.2.1 (Cheeger-Gromoll). *Soit (M,g) une variété riemannienne compact Ricci-plate. Alors il existe un revêtement fini riemannien de M qui est (globalement) isométrique à $T^n \times N$, où T^n désigne le tore réel plat de dimension n, et N une variété riemannienne compacte, simplement connexe.*

Dans le cas kählérien, on obtient le résultat plus fin suivant.

Théorème 3.2.2. *Soit (M,J,g) une variété kählérienne compacte Ricci-plate. Alors M admet un revêtement fini isomértique à*

$$\left(T^{2l} \times M_1 \times \cdots \times M_k, J_0 \times \cdots \times J_k, g_0 \times \cdots \times g_k\right), \tag{3.1}$$

où T^{2l} est un tore complexe plat de dimension l sur $\mathbb{C}$, et pour $1 \leqslant j \leqslant k$, $\left(M_j, J_j, g_j\right)$ est une variété kählérienne compacte simplement connexe irréductible Ricci-plate de dimension m_j, et telle que

- *Si m_j est pair et $\geqslant 4$, alors $\mathrm{Hol}\left(g_j\right) = \mathrm{Sp}\left(\frac{m_j}{2}\right)$ (i.e. M_j est hyperkählérienne)*
- *Sinon, $m_j \geqslant 2$ et $\mathrm{Hol}\left(g_j\right) = \mathrm{SU}\left(m_j\right)$ (i.e. M_j est une variété de Calabi-Yau).*

Démonstration. Soit $\pi : \left(\overline{M}, \overline{g}\right) \to (M,g)$ un revêtement riemannien fini donné par le Théorème 3.2.1. Par le Lemme 1.3.2, $\overline{M}$ hérite d'une structure de variété kählérienne Ricci-plate. Écrivons $\left(\overline{M}, \overline{g}\right) = (T^n \times N, g_0 \times g_N)$, avec N compacte, donc complète, et simplement connexe. On applique le Théorème 1.3.3, pour obtenir une isométrie

$$N \simeq (M_1, g_1) \times \cdots \times (M_k, g_k). \tag{3.2}$$

Comme la courbure de Ricci du produit M est la somme directe des tenseurs de courbure de chacun des facteurs, chaque facteur M_j est Ricci-plat. Soit $x = (x_0, x_1, \ldots, x_k) \in \overline{M} = (T^n \times M_1 \times \cdots \times M_k)$. On a la décomposition suivante,

$$T_x\overline{M} = \bigoplus_{0 \leqslant j \leqslant k}^{\perp} T_{x_j} M_j, \tag{3.3}$$

où l'on a posé $M_0 := T^n$. Cette décomposition nous donne une décomposition de la représentation du groupe $\mathrm{Hol}_x(g)$ en somme directe de représentations irréductibles. D'après le Théorème d'holonomie d'Ambrose-Singer 1.3.4, si l'un des M_j $(j \geqslant 1)$ correspond à la représentation triviale, alors il est plat. Or, les seules variétés riemanniennes complètes plates simplement connexes sont les espaces euclidiens d'après le Théorème d'Hadamard-Cartan 1.3.5, qui sont non compacts contrairement aux M_j. Donc T^n correspond à la composante isotypique de la représentation triviale. Maintenant, on utilise la structure kählérienne de $\overline{M}$, qui donne

$$\nabla \overline{J} = 0. \tag{3.4}$$

On en déduit que $\overline{J}$ commute avec le transport parallèle sur $\overline{M}$. C'est donc un automorphisme de la représentation de $\mathrm{Hol}(g)$. De là, $\overline{J}$ préserve les composantes isotypiques de $\mathrm{Hol}(g)$, en particulier l'espace tangent $T_{x_0}T^n$, induisant une structure complexe sur T^n. En particulier, $n = 2l$ est pair. Comme la somme directe (3.3) est orthogonale, et $\overline{J}$ préserve la métrique $\overline{g}$ (par définition d'une métrique hermitienne), $\overline{J}$ induit également une structure complexe sur N. L'identité

$$T_{x_N} N = \bigoplus_{1 \leqslant j \leqslant k}^{\perp} T_{x_j} M_j \tag{3.5}$$

est une décomposition de $\mathrm{Hol}(g_N)$ en sous-représentations irréductibles. On sait que $\overline{J}$ préserve chaque composante isotypique, mais il est possible que plusieurs facteurs d'une même composante isotypique soient entrelacés non trivialement. En fait, il est possible (mais pas évident) de modifier la décomposition de chaque composante isotypique, pour obtenir une autre décomposition dont les facteurs sont stables par la structure complexe. On obtient ainsi une nouvelle isométrie

$$\left(\overline{M}, \overline{J}, \overline{g}\right) \simeq T^{2l} \times (M_1, J_1, g_1) \times \cdots \times (M_k, J_k, g_k) \tag{3.6}$$

où cette fois les facteurs $M_j, 1 \leqslant j \leqslant k$ sont tous des variétés kählériennes Ricci-plates. On veut appliquer le théorème de classification de Berger aux M_j afin de déterminer leurs groupes d'holonomie. Il reste deux hypothèses à vérifier : l'asymétrie et l'irréductibilité locale. L'asymétrie est une conséquence de la classification des espaces symétriques par Élie Cartan, qui assure les seules variétés riemanniennes Ricci-plates symétriques sont les espaces euclidiens, non compacts. Supposons que M_1 soit localement réductible, et soit $p \in M_1$. Il existe un voisinage U de p et une isométrie $(U, g_1) \simeq (P, g_P) \times (Q, g_Q)$. Mais alors par définition du produit riemannien, on a, en notant (x, y) l'image de p dans le produit :

$$T_pU = T_pM_1 = T_xP \oplus T_xQ, \quad g_1 = g_P \oplus g_Q, \quad \mathrm{Hol}_p(g_1) = \mathrm{Hol}_x(g_P) \times \mathrm{Hol}_y(g_Q), \tag{3.7}$$

donc la représentation de $\mathrm{Hol}_p(g_1)$ n'est pas irréductible. C'est absurde d'après la construction des M_j par le théorème de de Rham. Ainsi, le théorème de classification de Berger s'applique.

Comme M_j est simplement connexe et Ricci-plate, on a $\mathrm{Hol}(g_j) \subset \mathrm{SU}(\dim_{\mathbb{C}} M_j)$, donc M_j est soit Calabi-Yau, soit Hyperkählérienne. □

Proposition 3.2.3. *Soit (M, J, g) une variété kählérienne Ricci-plate de dimension m. Alors pour $0 \leqslant p \leqslant m$, le groupe de Dolbeault $H^{p,0}(M)$ est isomorphe au sous-espace de $\left(\bigwedge^p M\right)^*$ invariant par $\mathrm{Hol}(g)$.*

3.3. Variétés de Calabi-Yau de dimension $\geqslant 3$

Le cas de la dimension complexe 2 est différent, car dans ce cas les variétés de Calabi-Yau et les variétés Hyperkählériennes coïncident, et sont des surfaces K3, que l'on sait bien étudier.

En dimension $\geqslant 3$, on a quand même des propriétés générales. On définit ici une variété de Calabi-Yau comme une variété kählérienne Ricci-plate de dimension m, de groupe d'holonomie $\mathrm{SU}(m)$.

Proposition 3.3.1. *Le groupe fondamental d'une variété de Calabi-Yau compacte est fini. De plus, la décomposition de Hodge vérifie $h^{0,0} = h^{1,1} = 1$ et $h^{p,0} = 0$ pour $0 < p < m$.*

Démonstration. Dans le revêtement donné par le Théorème 3.2.2, le tore n'apparaît pas (ie $l = 0$) car $\mathrm{Hol}(g) = \mathrm{SU}(m)$ ne laisse stable aucun sous-espace non trivial de $\mathbb{R}^{2m}$. Donc le revêtement universel de M est fini. Pour l'assertion portant sur les nombres de Hodge, on applique la Proposition 3.2.3. □

Proposition 3.3.2. *Tout fibré en droites complexes sur une variété de Calabi-Yau admet une structure holomorphe.*

Démonstration. On peut montrer [7] qu'un fibré en droites complexes admet une structure holomorphe si et seulement si sa première classe de Chern est dans $H^{1,1}(M) \subset H^2(M; \mathbb{C})$. Or la proposition précédente montre qu'en dimension $\geqslant 3$, $H^2(M; \mathbb{C}) = H^{1,1}(M)$. □

En utilisant la Proposition 3.3.2, on peut montrer qu'une variété de Calabi-Yau M compacte admet toujours un fibré en droites vérifiant une propriété de « positivité », qui est de plus holomorphe. Le théorème de plongement de Kodaïra assure que pour un tel fibré L, les sections holomorphes de $L^{\otimes N}$, pour N entier assez grand, fournissent un plongement de M dans $\mathbb{C}P^N$. L'image d'un tel plongement est toujours algébrique. Ainsi, les variétés de Calabi-Yau compactes sont projectives, et peuvent être étudiées via les outils de la géométrie algébrique.

Bibliographie

[1] A. L. Besse, « Einstein Manifolds and Topology », in *Einstein Manifolds*, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1987, p. 154-176. doi: 10.1007/978-3-540-74311-8_7.

[2] W. Ambrose et I. M. Singer, « A Theorem on Holonomy », *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 75, nº 3, p. 428-443, 1953, Consulté le: 28 novembre 2025. [En ligne]. Disponible sur: http://www.jstor.org/stable/1990721

[3] S. Kobayashi et K. Nomizu, *Foundations of differential geometry, volume 2*, vol. 2. John Wiley & Sons, 1996.

[4] M. Gross *et al.*, *Calabi-Yau Manifolds and Related Geometries: Lectures at a Summer School in Nordfjordeid, Norway, June 2001*. in Universitext. Springer Berlin Heidelberg, 2012. [En ligne]. Disponible sur: https://books.google.fr/books?id=FFQOBwAAQBAJ

[5] J. Cheeger et D. Gromoll, « The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature », *Journal of Differential Geometry*, vol. 6, nº 1, p. 119-128, 1971.

[6] J. Cheeger et D. Gromoll, « On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature », *Annals of Mathematics*, vol. 96, nº 3, p. 413-443, 1972.

[7] C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, vol. 10. Société mathématique de France Paris, 2002.